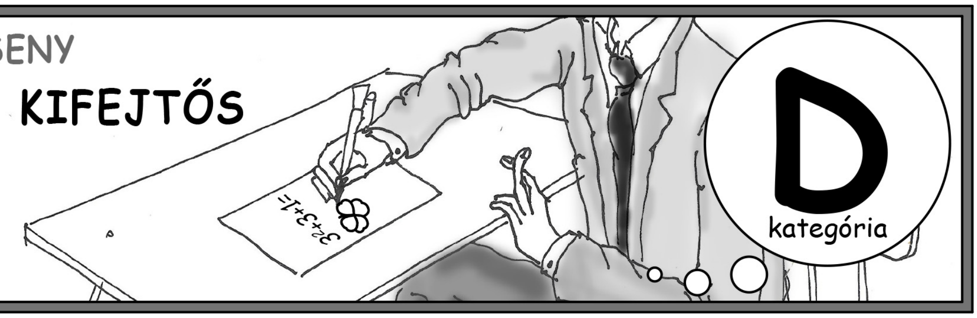
DÜRER VERSENY

# MATEMATIKA KIFEJTŐS

9-12. OSZTÁLYOSOK

DÖNTŐ:

2020. FEBRUÁR 7.




**1.** Szeretnénk az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számokkal kitölteni az alábbi ábrát, mindegyiket pontosan egyszer felhasználva.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

**a)** Megtehetjük-e ezt úgy, hogy minden sorban, oszlopban és átlóban a számok összege osztható legyen 3-mal?

**b)** Kitölthető-e úgy a táblázat, hogy minden összeg 5-tel osztható legyen?

**c)** Kitölthető-e úgy, hogy 7-tel legyenek oszthatóak az összegek?

**d)** Kitölthető-e úgy, hogy 9-cel legyenek oszthatóak az összegek?

**2.** Legyen $ABC$ egy hegyesszögű háromszög, ahol $AC > BC$. Legyen $T$ a $C$-ből induló magasság talppontja, $O$ pedig a háromszög körülírt körének középpontja. Bizonyítsátok be, hogy az $ATOC$ és a $BTOC$ négyszögek területe megegyezik.

**3.** Egy $n \times n$-es táblázat bal alsó $3 \times 3$-as négyzetének minden egyes kis mezőjén van 1-1 korong. Egy lépésben tetszőleges korongot áttükrözhetünk egy vele egy sorban, vagy oszlopban lévő másikra. Elérhetjük-e azt, hogy a 9 korong a jobb felső $3 \times 3$-as négyzet kis mezőibe kerüljön oly módon, hogy minden egyes kis mezőn 1-1 korong legyen,

**a)** ha $n = 9$?

**b)** ha $n = 8$?

**4.** Albrecht olyan hatszögeket szeret rajzolni a füzetébe, melyeknek minden oldala egyforma hosszú. Egy ilyen hatszög egy belső szögét szépnek mondja, ha az pontosan 120 fokos. Minden hatszögre ráírja, hogy hány szép belső szöge van. Hányféle számot írhat Albrecht a hatszögekre? Adjatok példát minél több lehetséges értékre, és bizonyítsátok be, hogy más miért nem lehetséges.
*Albrecht konkáv hatszögeket is rajzolhat.*

**5.** Legyen $n$ tetszőleges pozitív egész szám. Bizonyítsátok be, hogy $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$-nek legalább $n$ különböző pozitív prímosztója létezik.

**6. Játék:** Károly és Dezső $m$-ig szeretnének elszámolni, és közben a következő játékot játsszák: 0-ról kezdenek, a két játékos felváltva adhat hozzá egy 13-nál kisebb pozitív egészet a korábbi számhoz, azonban a babonájuk miatt ha egyikük $x$-et adott hozzá, akkor másikuk a következő lépésben nem adhat hozzá $13 - x$-et. Az veszít, aki eléri (vagy átlépi) $m$-et.
*Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Az $m$ szám ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.*

*Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.*
*A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:*

*a XIII. Dürer Verseny szervezői*