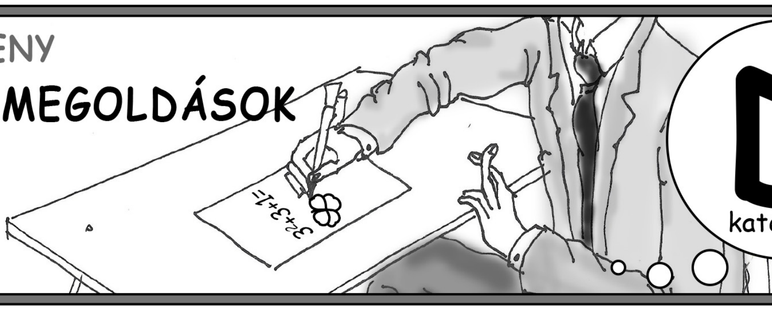
DÜRER VERSENY

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK

9-12. OSZTÁLYOSOK

DÖNTŐ:

2020. FEBRUÁR 7-9.



D

kategória

D1. Szeretnénk az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számokkal kitölteni az alábbi ábrát, mindegyiket pontosan egyszer felhasználva.
a) Megtehetjük-e ezt úgy, hogy minden sorban, oszlopban és átlóban a számok összege osztható legyen 3-mal?
b) Kitölthető-e úgy a táblázat, hogy minden összeg 5-tel osztható legyen?
c) Kitölthető-e úgy, hogy 7-tel legyenek oszthatóak az összegek?
d) Kitölthető-e úgy, hogy 9-cel legyenek oszthatóak az összegek?

Megoldás: Az **a)**, **b)** és **d)** esetekben lehetséges a kitöltés, mutatunk rájuk példát.

Az **a)** és **b)** részre is jó az alábbi példa (amely csak egy a megfelelő kitöltések közül):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ennél a kitöltésnél minden sorban, oszlopban és átlóban éppen 15 az összeg, tehát mindegyik összeg osztható 3-mal, illetve mindegyik osztható 5-tel.

Természetesen a **b)** részhez nem szükséges olyan példát találni, ahol még 3-mal is oszthatók az összegek, és az **a)** -hoz sem kell olyat, ahol 5-tel oszthatók, ez csak ráadás. Az összegeknek egyenlőknek sem szükséges lenniük.

A 3×3*-as bűvös négyzet éppen illik a versenyhez, Dürer* 4×4*-es bűvös négyzetének kistestvére!*

A **d)** részre, és (ebből következően) **a)**-ra is jó példa a következő:

1	8	9
2	3	4
6	7	5

Itt minden összeg osztható 9-cel, mivel vagy 9, vagy 18.

A **c)** eset feltételének megfelelően azonban nem tölthető ki a táblázat.

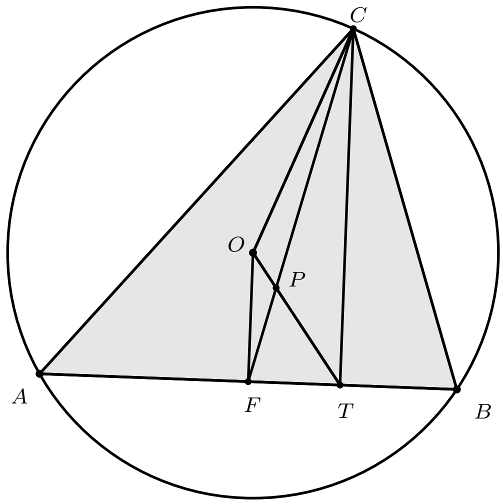
Indirekt módon bizonyítunk, tegyük fel, hogy létezik olyan kitöltése a táblázatnak, amelyben minden összeg osztható 7-tel. Jelöljük S-sel a táblázatba írt számok összegét! Az első, a második és a harmadik sorba írt számok összegét pedig jelölje S_1, S_2 illetve S_3. Tudjuk, hogy $S = 1+2+3+\ldots+9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ az összes szám összege (tetszőleges kitöltés esetén).
A táblázat bármely, a **c)** pontnak megfelelő kitöltésében minden sorban osztható 7-tel az adott sorba írt számok összege, tehát S_1, S_2 és S_3 mind oszthatók 7-tel. Így az összegük, $S_1 + S_2 + S_3$ is osztható 7-tel.

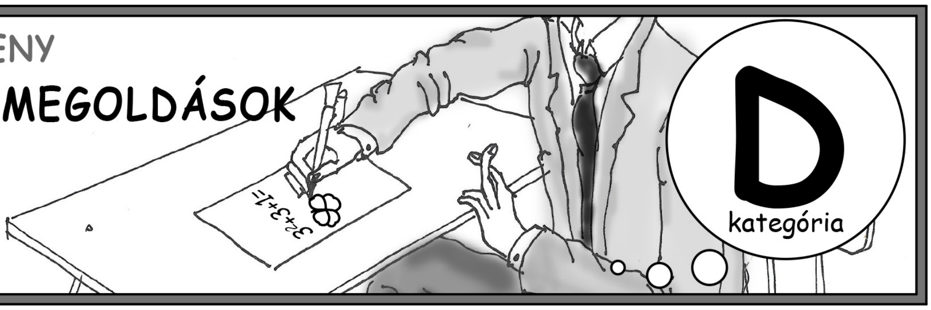
A táblázatba írt számok összegét úgy is megkaphatjuk, hogy a különböző sorokba írt számok összegeit (S_1-et, S_2-t és S_3-at) adjuk össze, tehát $S = S_1 + S_2 + S_3$. Mivel $S = 45$ és $S = S_1 + S_2 + S_3$ osztható 7-tel, ezekből azt kapnánk, hogy 45 osztható 7-tel, ami nem igaz. Ez tehát ellentmond annak, hogy létezik a táblázatnak olyan kitöltése, ahol minden sorban 7-tel osztható a számok összege. Így olyan kitöltés sincs, ahol a sorokon túl még minden oszlopban és átlóban is oszthatók lennének az összegek 7-tel.

D2. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, ahol $AC > BC$. Legyen T a C-ből induló magasság talppontja, O pedig a háromszög körülírt körének középpontja. Bizonyítsátok be, hogy az $ATOC$ és a $BTOC$ négyszögek területe megegyezik.

Megoldás: Legyen az AB oldal felezőpontja F, továbbá az FC és OT szakaszok metszéspontja P. Ekkor elegendő megmutani, hogy a $BTOC$ négyszög területe éppen feleakkora, mint a háromszög területe, vagyis ugyanakkora, mint az FBC háromszög területe, hiszen az FC súlyvonal két egyenlő területű háromszögre bontja fel az eredeti háromszöget. Mivel O a háromszög körülírt körének középpontja, így rajta van AB felező merőlegesén, vagyis $AB \perp FO$. A TCO és TCF háromszögek területe megegyezik, hiszen megegyezik egy-egy oldaluk és a hozzátartozó magasságvonaluk hossza. Ilyen módon $T(BTOC) = T(BTC_\triangle) + T(TCO_\triangle) = T(BTC_\triangle) + T(TFC_\triangle) = T(BFC_\triangle)$.

Megjegyzés: Az O pontról csak azt használtuk fel, hogy az ATC háromszög belsejében van és illeszkedik az AB oldalfelező merőlegesére, tehát minden olyan pontra, ami rendelkezik ezzel a két tulajdonsággal, igaz marad az állítás.





D3. Egy $n \times n$-es táblázat bal alsó 3×3-as négyzetének minden egyes kis mezőjén van 1-1 korong. Egy lépésben tetszőleges korongot áttükrözhetünk egy vele egy sorban, vagy oszlopban lévő másikra. Elérhetjük-e azt, hogy a 9 korong a jobb felső 3×3-as négyzet kis mezőibe kerüljön oly módon, hogy minden egyes kis mezőn 1-1 korong legyen,
a) ha $n = 9$?
b) ha $n = 8$?

Megoldás: a) Először megmutatjuk, hogy ha van egy 1×9-es fekvő, vagy álló téglalap első három mezőjén egy korong, akkor elérhető szabályos lépésekkel, hogy a három korong az utolsó három mezőre kerüljön.

Számozzuk meg a mezőket sorban 1-től 9-ig. Kezdetben a három korong álljon az $1, 2, 3$ mezőkön. Első lépésben az első mezőn álló korongot tükrözzük át a harmadik mezőn álló korongon. Ekkor az ötös mezőre fog kerülni. Mivel ez a középső mező, így a következő két lépésben, ha áttükrözzük rajta a második és harmadik helyen álló korongokat, akkor azok a hetedik és a nyolcadik mezőre kerülnek. Végül pedig az ötödik mezőn álló korongot a hetedik helyen álló korongon áttükrözve az a kilencedik mezőre kerül. Tehát elértük, hogy az utosó három mezőre került át a három korong.

Most peddig ennek segítségével megmutatjuk, hogy a kívánt elrendezés elérhető.

Először az alsó három sorban végezzük el a fent leírt lépéssort, úgy hogy a korongok a sorok bal oldaláról a sorok jobb szélső három mezőjére kerüljenek. Ekkor a 9 korong a jobb alsó 3×3-as mezőre került.

Most pedig ha az utolsó három oszlopban végezzük el ezt a lépéssort, úgy, hogy lentről felfele számozzuk meg az oszlopokat, akkor az alsó három helyről a felső három helyre kerülnek minden oszlopban a korongok.

Tehát elértük, hogy a jobb felső 3×3-as négyzet kis négyzeteiben került át a 9 korong.

b) A korongok helyzetét jelöljük koordinátákkal. Egy (x, y) koordinátájú korong jelölje azt, hogy ez a korong az x-edik sor y-adik oszlopában van. $(1 \leq x, y \leq 8)$

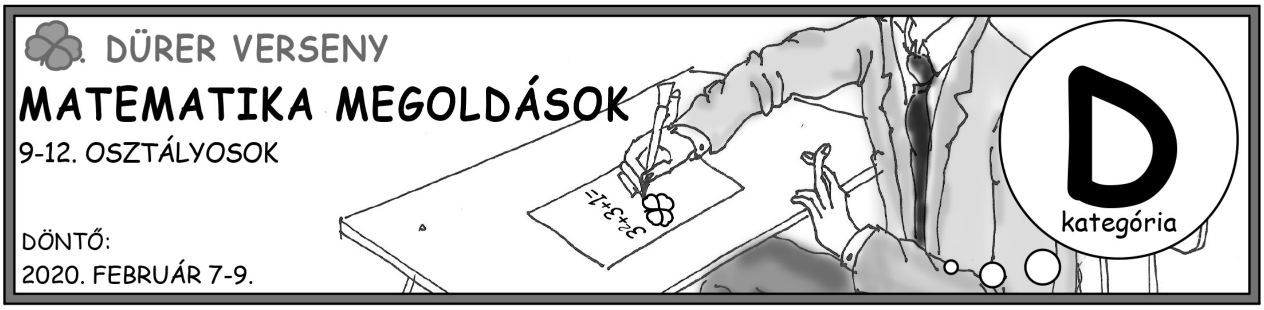
Vizsgáljuk meg, hogy egy tükrözés esetén hogy változhat egy korong helyzetét jelölő (x, y) pár tagjainak paritása. Ahhoz, hogy ezt tükrözhessük egy korongra, legalább az egyik koordinátájuknak meg kell egyezniük és ez a koordináta a tükrözés alatt sem fog változni. Így a paritása sem változhat.

Tegyük fel, hogy a tükrözendő pontnak a másik koordinátája l, és annak a pontnak, amire tükrözünk, m. Ekkor a tükrözés után az új koordináta l helyett $l + 2 \cdot (m - l)$ lesz. Ezek paritása megegyezik, mivel $2 \cdot (m - l)$ páros, és egy számhoz egy páros számot adva annak a paritása nem változik.

Tehát a korongok koordinátáinak a paritása a tükrözések alatt nem változik. Most vizsgáljuk meg a kiinduló és a véghelyzetben a korongok koordinátáinak paritását.

4 db *(páratlan, páratlan)* koordinátájú korong van kezdetben, amelyek a tükrözések után is ilyen paritásúak lesznek. Viszont az elérendő helyzetben csak 1 db *(páratlan, páratlan)* koordinátájú pár van.

Tehát 8×8-as tábla estén nem érhető el a kívánt átrendezés, mivel a kiinduló helyzetben van 4 olyan korong, amik legfeljebb 1 mezőt fedhetnek le az elérni kívánt mezők közül, tehát lesz legalább 3 lefedetlen mező.



D4. Albrecht olyan hatszögeket szeret rajzolni a füzetébe, melyeknek minden oldala egyforma hosszú. Egy ilyen hatszög egy belső szögét szépnek mondja, ha az pontosan 120 fokos. Minden hatszögre ráírja, hogy hány szép belső szöge van. Hányféle számot írhat Albrecht a hatszögekre? Adjatok példát minél több lehetséges értékre, és bizonyítsátok be, hogy más miért nem lehetséges.
Albrecht konkáv hatszögeket is rajzolhat.

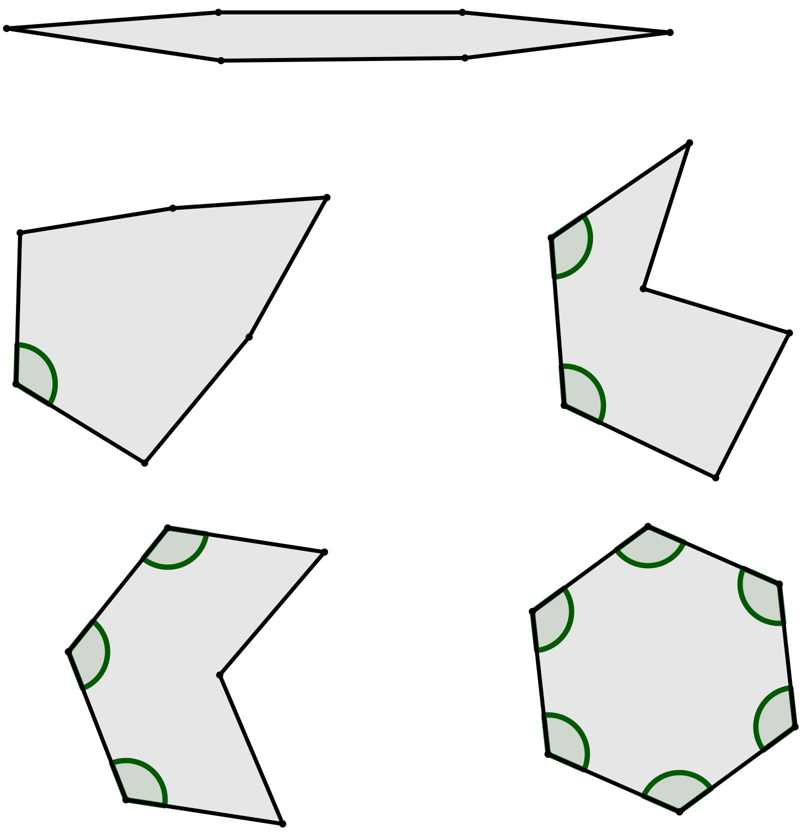
Megoldás:

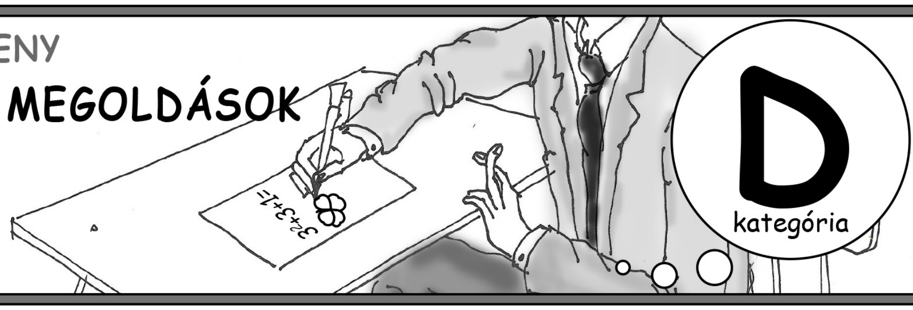
Mivel egy hatszögnek hat szöge van, így a lehetséges értékek 0 és 6 közt vannak.

A szép szögek számának lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3 és 6 (példák lentebb).

A szép szögek nem lehetnek pontosan öten, mert ekkor (például a hatszög belső szögösszegére hivatkozva) azt látjuk, hogy a hatodik szög is szép.

Tegyük fel, hogy van olyan hatszög, aminek pontosan négy szép szöge van. (Láncszerűen) egymás mellett levő szép szögek egyértelműen meghatározzák az oldalaikon levő csúcsok egymáshoz képesti helyzetét – szemléletesen: kimerevítik az ábrát maguk körül. Mivel ennek a hatszögnek két nem szép szöge van, ezért ezek két láncra osztják az oldalakat (lehet, hogy az egyik láncban csak egyetlen oldal van). Ekkor ez a két lánc egymáshoz képest legfeljebb kétféleképp állhat: az egyik esetben konvex, a másikban pedig konkáv (vagy esetleg elfajuló) hatszöget kapunk. A konkáv eseteket azonban kizárhatjuk, mivel a konkáv csúcsok a szép csúcsok közül kerülnének ki, de a szép csúcsoknál levő szögek konvexek, így már csak a konvex esetek maradtak. A két nem szép csúcs egymáshoz viszonyított helyzete alapján (szomszédosak, egy csúcs van köztük vagy átellenesek) megvizsgálva, mi lesz ez az egyértelmű hatszög, mindig a szabályos hatszöget kapjuk, aminek pedig hat szép szöge van, azonban feltettük, hogy csak négy van, így ellentmondásra jutottunk, tehát nem létezik négy szép szöggel rendelkező hatszög.





D5. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Bizonyítsátok be, hogy $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$-nek legalább n különböző pozitív prímosztója létezik.

Megoldás: Teljes indukcióval fogunk bizonyítani. $n = 1$ esetén $2^{2^1} + 2^{2-1} + 1 = 7$, aminek van legalább 1 prímosztója. $n = 2$ esetén pedig $2^{2^2} + 2^{2^{2-1}} + 1 = 21 = 3 \cdot 7$, aminek van legalább 2 különböző pozitív prímosztója.

Legyen $n > 1$ és tegyük fel, hogy n-ig igaz a feladat állítása.

Vegyük észre, hogy ha $x = 2^{2^{n-1}}$, akkor a vizsgálandó kifejezés pont $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1 = x^2 + x + 1$.

$n + 1$ esetén pedig $2^{2^{n+1}} + 2^{2^{(n+1)-1}} + 1 = x^4 + x^2 + 1$. A jobb oldalt trükkössen szorzattá lehet alakítani:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Azaz $2^{2^{n+1}} + 2^{2^{(n+1)-1}} + 1 = (2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1)$. Azonban a második szorzótényező pont az előző összeg, tehát az összes eddigi pozitív prímosztó megmarad.

Ha $2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1$ és $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ relatív prímek, hiszen ha lenne egy d közös osztójuk, az osztaná a különbségüket is, ami egy kettőhatvány. Ám mindkét szám páratalan, így legnagyobb közös osztójuk csakis 1 lehet.

Kihasználva, hogy az első szorzótényező 1-nél nagyobb, ez azt jelenti, hogy az első szorzótényezőnek van olyan prímosztója, ami nem osztja a második szorzótényezőt (sőt, csak ilyen prímosztója van). Ebből, valamint indukciós feltevésből következik, hogy a szorzatnak van legalább $n + 1$ különböző pozitív prímosztója.

D6. **Játék:** Károly és Dezső m-ig szeretnének elszámolni, és közben a következő játékot játsszák: 0-ról kezdenek, a két játékos felváltva adhat hozzá egy 13-nál kisebb pozitív egészet a korábbi számhoz, azonban a babonájuk miatt ha egyikük x-et adott hozzá, akkor másikuk a következő lépésben nem adhat hozzá $13 - x$-et. Az veszít, aki eléri (vagy átlépi) m-et.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Az m szám ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Nevezzük nyerő helyzetnek azt a helyzetet, ahonnan garantáltan nyerni tudunk, míg vesztő helyzetnek azt, ahonnan az ellenfél garantáltan nyerni tud. Nevezzük az n számot x-nyerőnek ($1 \leq x < 13$), ha mi $n - x$-ről n-re lépve nyerő helyzetben vagyunk. Nevezzük továbbá az n számot nyerő mezőnek, ha az x-nyerő minden x-re, illetve vesztő mezőnek, ha az semmilyen x-re nem x-nyerő.

m és m-nél nagyobb számok vesztő mezők, mert ha odalépünk, akkor vesztettünk.

$m - 1$ nyerő mező, mert onnan az ellenfél csak vesztő helyzetre tud lépni.

$m - 2$ csak 12-nyerő, mert ha nem 12-vel lépünk rá, akkor az ellenfél az $m - 1$-re lép, ha viszont 12-vel lépünk rá, akkor az ellenfél csak vesztő helyzetre tud lépni.

$m - 3$ csak 11-nyerő, mert ha nem 11-gyel lépünk rá, akkor az ellenfél az $m - 1$-re lép, ha viszont 11-gyel lépünk rá, akkor az ellenfél csak vesztő helyzetre tud lépni.

...

$m - 13$ csak 1-nyerő, mert ha nem 1-gyel lépünk rá, akkor az ellenfél az $m - 1$-re lép, ha viszont 1-gyel lépünk rá, akkor az ellenfél csak vesztő helyzetre tud lépni.

$m - 14$ vesztő mező, mert bármit is lépünk, mindenképp tud az ellenfél nyerő helyzetre lépni.

Innentől pedig periodikusan ismétlődik, ami $m - 1$-től $m - 14$-ig történt, mivel $m - 14$-nél kisebb számról már nem tudunk egy legalább $m - 14$-es nyerő helyzetre lépni.

Ilyen módon a nyerő helyzetek a következők ($k \geq 0$):

x-nyerő	1	2	3	4	5
szám	$m - 14k - 13$	$m - 14k - 12$	$m - 14k - 11$	$m - 14k - 10$	$m - 14k - 9$

x-nyerő	6	7	8	9	10
szám	$m - 14k - 6$	$m - 14k - 5$	$m - 14k - 4$	$m - 14k - 8$	$m - 14k - 7$

x-nyerő	11	12	nyerő mező	vesztő mező
szám	$m - 14k - 3$	$m - 14k - 2$	$m - 14k - 1$	$m - 14k$

Így ha m 14-gyel osztva 1 maradékot ad, akkor a másodiknak van nyerő stratégiája, minden más esetben a kezdőnek.