. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK

9-12. OSZTÁLYOSOK

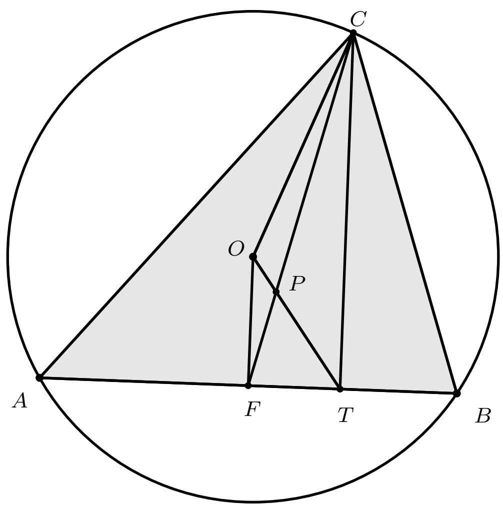
DÖNTŐ:

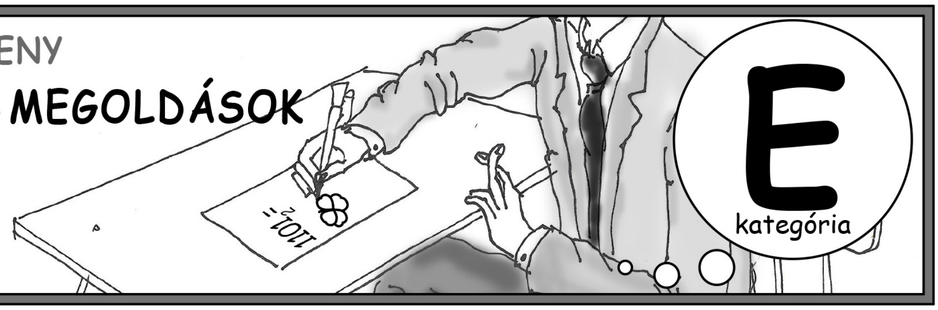
2020. FEBRUÁR 7-9.

E1. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, ahol $AC > BC$. Legyen T a C-ből induló magasság talppontja, O pedig a háromszög körülírt körének középpontja. Bizonyítsátok be, hogy az $ATOC$ és a $BTOC$ négyszögek területe megegyezik.

Megoldás: Legyen az AB oldal felezőpontja F, továbbá az FC és OT szakaszok metszéspontja P. Ekkor elegendő megmutani, hogy a $BTOC$ négyszög területe éppen feleakkora, mint a háromszög területe, vagyis ugyanakkora, mint az FBC háromszög területe, hiszen az FC súlyvonal két egyenlő területű háromszögre bontja fel az eredeti háromszöget. Mivel O a háromszög körülírt körének középpontja, így rajta van AB felező merőlegesén, vagyis $AB \perp FO$. A TCO és TCF háromszögek területe megegyezik, hiszen megegyezik egy-egy oldaluk és a hozzátartozó magasságvonaluk hossza. Ilyen módon $T(BTOC) = T(BTC_\triangle) + T(TCO_\triangle) = T(BTC_\triangle) + T(TFC_\triangle) = T(BFC_\triangle)$.

Megjegyzés: Az O pontról csak azt használtuk fel, hogy az ATC háromszög belsejében van és illeszkedik az AB oldalfelező merőlegesére, tehát minden olyan pontra, ami rendelkezik ezzel a két tulajdonsággal, igaz marad az állítás.





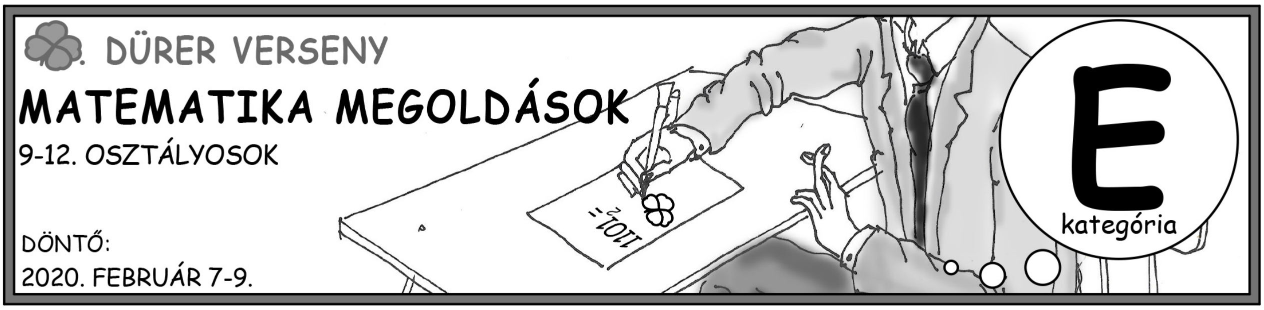
E2. Adott egy 13×13-as táblára osztott térkép, melyről tudjuk, hogy az egyik mezőjének közepén egy ellenséges tank állomásozik, amelyet meg kell semmisítenünk. Ehhez kétszer kell eltalálnunk mezők közepére leadott lövésekkel, azonban ha a tankot találat éri, akkor elővigyázatossági okokból átviszik egy oldalszomszédos mezőre, egyébként egy helyben marad. Legalább hány lövést kell összesen leadnunk, hogy a tankot biztosan megsemmisítsük?
A tankot nem látjuk, és semmilyen egyéb visszajelzést sem kapunk a helyzetéről.

Megoldás: Legalább 253 lövés kell ahhoz, hogy a tank biztosan megsemmisüljön:

Színezzük ki a táblát sakktáblaszerűen (úgy, hogy a saroknégyzetek feketék legyenek), majd sorban lőjünk rá az összes fehér színű mezőre. Ezután a tank biztosan fekete színű mezőn van, hiszen ha eredetileg fehéren volt, akkor onnan átment egy szomszédos feketére. Ezek után lőjünk rá az összes fekete színű mezőre, ennek során pontosan egyszer fogjuk eltalálni a tankot, mely vagy megsemmisül, vagy átmegy egy fehér mezőre. Ezután ismét lőjünk rá az összes fehér mezőre, ekkor ha eddig nem semmisült meg, eltaláljuk, és megsemmisítjük.

Ez összesen $84 + 85 + 84 = 253$ lövés, ennyi tehát biztosan elég a lelövéshez. Megmutatjuk, hogy ennél kevesebb lövéssel nem feltétlenül semmisítjük meg a tankot. Ha lenne két olyan szomszédos mező, amelyekre összesen legfeljebb kétszer lőttünk, akkor a tank a kettő közül arról a mezőről indulva, ahová az első lövés nem érkezett, majd a másik mezőre menekülve nem semmisülne meg.

Tehát ha lefedjük a 13×13-as táblát egy mező kivételével 1×2-es dominókkal, akkor látszik, hogy legalább $\frac{13 \cdot 13 - 1}{2} \cdot 3 + 1 = 253$ lövés szükséges a biztos megsemmisítéshez, mivel az egy kimaradó mezőre is legalább egyszer rá kell lőni.



E3. Létezik-e 5 egymást követő pozitív egész szám, amelyek legkisebb közös többszöröse egy négyzetszám?

Megoldás: A legnagyobb közös többszöröst úgy kapjuk meg, hogy minden prímosztóból vesszük az előforduló legnagyobb hatványt. Mivel az állítás szerint ez egy négyzetszám, így minden prím maximális kitevőjének párosnak kell lennie. Azt tudjuk, hogy a 3-nál nagyobb prímek legfeljebb az egyik számot oszthatják, így ha osztják bármelyiket is, akkor annak a prímnek a kitevője páros lesz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz. Ekkor az 5 szám közül lesz egy szám, amely nem osztható se 2-vel, se 3-mal. Ebben akkor csak 3-nál nagyobb prímek lesznek, amelyek viszont mindig páros hatványon szerepelnek, így ez egy négyzetszám lesz. Látható, hogy ha a legkisebb szám 1, akkor nem kapunk megoldást. Így viszont legfeljebb egy négyzetszám lehet az öt szám közt, vagyis a másik négy szám nem négyzetszám.

Mivel a számok közt van 2-vel osztható, így kell lennie olyan számnak, ahol a 2 páros kitevőn szerepel. Ez a szám nem lehet négyzetszám, mivel az egyetlen négyzetszám nem osztható 2-vel, így kell egy olyan prím, amely páratlan hatványon szerepel benne, ez csak a 3 lehet. Hasonlóan lesz egy olyan szám, ahol a 3 páros, a 2 pedig páratlan hatványkitevőn szerepel. Ezzel pedig ellentmondásra jutunk, mivel találtunk 2 darab 6-tal osztható számot 5 egymás utáni szám közt. Vagyis nem lehet négyzetszám a legkisebb közös többszörös.

E4. Endre felírt egy lapra n (nem feltétlenül különböző) egész számot, majd Kelemen az n szám mind a 2^n részhalmazához felírta a táblára a benne lévő számok összegét.
a) Mely pozitív egész n számok esetén fordulhat elő, hogy két különböző lapra leírt (különböző) szám n-eshez a táblán ugyanazok a számok szerepelnek?
b) Bizonyítsátok be, hogy ha Endre csak pozitív egész számokat írt a lapra, és Ferenc csak a táblán lévő számokat látja, akkor azokból meg tudja határozni a lapon szerepelt n számot.

Megoldás:

a) Léteznek ilyen halmazok, mutatunk egy példát. Legyenek az egyik lapon szereplő számok $\{-1,-1,-1,\ldots,-1,n-1\}$, míg a másikon ezen számok ellentettjei $\{1,1,1,\ldots,1,-n+1\}$, megmutatjuk, hogy ekkor a két laphoz tartozó táblán szereplő számok megegyeznek.

Válasszunk ki az első lapról egy részhalmazt, illetve a második lapról "ugyanennek" a részhalmaznak a komplementerét. A két összeg megegyezik, hiszen az összes lapon lévő szám összege 0, illetve ha kiválasztjuk "ugyanazt" a részhalmazt, akkor az összegek egymás ellentettjei. Ebben megoldásban a konkrét számokat nem használtuk, így tulajdonképpen az alábbi lemmát láttuk be.

Lemma. Adott egy $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ szám n-es, amely elemeinek összege 0. Legyen a másik szám n-es $\{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n\}$. Ekkor a táblán szereplő számok megegyeznek.

A lemma szerint sok olyan példát látunk, amelyeknél a részhalmazösszegek nem egyértelműek. Abban azonban közösek, hogy mindegyikben előfordulnak negatív számok. A **b)** rész arra a kérdésre válaszol, hogy vajon minden példában szükségszerű-e a negatív számok jelenléte.

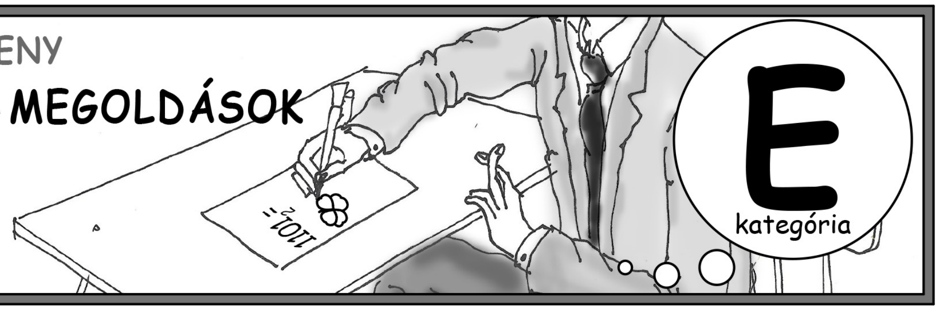
b) A lapon és táblán lévő számokat rendezzük növekvő sorrendbe.

Vizsgáljuk meg a táblán szereplő összegeket. Az üres halmaz összege nulla, minden más összeg pozitív lesz. Vegyük ezek közül a legkisebbet, legyen ez a_1. Tudjuk, hogy a_1 mindenképpen egy egyelemű halmaz összege (hiszen egy halmaz összege csökkenthető lenne egy eleme elhagyásával), azaz a_1 rajta volt a lapon. Ezután a_1-et töröljük le a tábláról.

A táblán maradt legkisebb összegnek szintén egyelemű halmaz összegének kell lennie, hasonló meggondolásból, mint az előbb. Legyen ez a_2, majd a_2-t és $a_1 + a_2$-t töröljük le a tábláról.

Ezt így folytatjuk. A k-adik lépésben tudjuk, hogy $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ számok a legkisebb $k-1$ szám a lapon, illetve ebből a $k-1$-ből álló (legalább 1, legfeljebb $k-1$ tagú) összegeket már letöröltük. Vizsgáljuk meg, hogy a legkisebb számot (legyen a_k) hogyan kaphatjuk meg. Csak a $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ számokból nem állhat az összeg, mert akkor már letöröltük volna, így a lapról szerepel (legalább egy) $k-1$-edik utáni szám. Ezen összegek közül a legkisebb az egytagú (lapon lévő) k-adik szám (hiszen egy halmaz összege csökkenthető lenne egy elem elhagyásával, illetve egy kisebb elem vételével). Így a_k valóban a k-adik lapon szereplő szám.

Ezzel a módszerrel n lépésben visszafejthetjük a lapon szereplő szám n-eseket.



E5. Legyen $H = \{-2019, -2018, ..., -1, 0, 1, 2, ..., 2020\}$. Adjátok meg az összes olyan $f : H \to H$ függvényt,
a) melyre $x = f(x) - f(f(x))$ teljesül minden $x \in H$ esetén.
b) melyre $x = f(x) + f(f(x)) - f(f(f(x)))$ teljesül minden $x \in H$ esetén.

Megoldás: A megoldás során $f^n(x)$ jelöli azt, hogy az x számra n-szer alkalmazzuk az f függvényt.

a) A fenti jelölést használva az egyenlet $x = f(x) - f^2(x)$ alakú. Az egyenletbe $x = f(x)$-et helyettesítve kapjuk, hogy $f(x) = f^2(x) - f^3(x)$. Ezt összeadva az eredeti egyenlettel: $x + f(x) = f(x) - f^2(x) + f^2(x) - f^3(x)$, azaz $x = -f^3(x)$. Ebbe $x = 2020$-at helyettesítve kapjuk, hogy $f^3(2020) = -2020$, ám ez ellentmondás, mivel $f^3(2020) \in H$ de $-2020 \notin H$. Tehát nincs ilyen függvény.

b) Az egyenlet $x = f(x) + f^2(x) - f^3(x)$ alakú. Helyettesítsünk $x = f(x)$-et az egyenletbe, ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(x) = f^2(x) + f^3(x) - f^4(x).$$

Ezt az egyenletet adjuk hozzá az előző egyenlethez:

$$x + f(x) = f(x) + 2f^2(x) - f^4(x)$$

Átrendezve:

$$x - f^2(x) = f^2(x) - f^4(x)$$

Indukcióval igazoljuk, hogy $x - f^2(x) = f^{2n}(x) - f^{2n+2}(x)$ teljesül minden n pozitív egészre. $n = 1$ esetén már láttuk, hogy igaz az állítás. Ha n-re igaz az állítás, akkor $x - f^2(x) = f^{2n}(x) - f^{2n+2}(x)$, ebbe $x = f^2(x)$-t helyettesítve kapjuk, hogy

$$f^{2n+2}(x) - f^{2n+4}(x) = f^2(x) - f^4(x) = x - f^2(x),$$

tehát $n + 1$-re is igaz az állítás, azaz beláttuk, hogy

$$x - f^2(x) = f^2(x) - f^4(x) = f^4(x) - f^6(x) = f^6(x) - f^8(x) = \dots,$$

így az $x, f^2(x), f^4(x), \dots$ sorozat egy számtani sorozat, melynek minden eleme a véges H halmazból való, így a sorozat állandó, vagyis $x = f^2(x)$.
Azok a függvények, melyekre $x = f^2(x)$ teljesül, valóban megoldások, hiszen ekkor $x = f(x)$-t helyettesítve kapjuk, hogy $f(x) = f^3(x)$ is teljesül, tehát $x = f(x) + f^2(x) - f^3(x)$.

E6. **Játék:** Károly és Dezső m-ig szeretnének elszámolni, és közben a következő játékot játsszák: 0-ról kezdenek, a két játékos felváltva adhat hozzá egy 13-nál kisebb pozitív egészet a korábbi számhoz, azonban a babonájuk miatt ha egyikük x-et adott hozzá, akkor másikuk a következő lépésben nem adhat hozzá $13 - x$-et. Az veszít, aki eléri (vagy átlépi) m-et.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Az m szám ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Nevezzük nyerő helyzetnek azt a helyzetet, ahonnan garantáltan nyerni tudunk, míg vesztő helyzetnek azt, ahonnan az ellenfél garantáltan nyerni tud. Nevezzük az n számot x-nyerőnek ($1 \leq x < 13$), ha mi $n - x$-ről n-re lépve nyerő helyzetben vagyunk. Nevezzük továbbá az n számot nyerő mezőnek, ha az x-nyerő minden x-re, illetve vesztő mezőnek, ha az semmilyen x-re nem x-nyerő.

m és m-nél nagyobb számok vesztő mezők, mert ha odalépünk, akkor vesztettünk.

$m - 1$ nyerő mező, mert onnan az ellenfél csak vesztő helyzetre tud lépni.

$m - 2$ csak 12-nyerő, mert ha nem 12-vel lépünk rá, akkor az ellenfél az $m - 1$-re lép, ha viszont 12-vel lépünk rá, akkor az ellenfél csak vesztő helyzetre tud lépni.

$m - 3$ csak 11-nyerő, mert ha nem 11-gyel lépünk rá, akkor az ellenfél az $m - 1$-re lép, ha viszont 11-gyel lépünk rá, akkor az ellenfél csak vesztő helyzetre tud lépni.

...

$m - 13$ csak 1-nyerő, mert ha nem 1-gyel lépünk rá, akkor az ellenfél az $m - 1$-re lép, ha viszont 1-gyel lépünk rá, akkor az ellenfél csak vesztő helyzetre tud lépni.

$m - 14$ vesztő mező, mert bármit is lépünk, mindenképp tud az ellenfél nyerő helyzetre lépni.

Innentől pedig periodikusan ismétlődik, ami $m - 1$-től $m - 14$-ig történt, mivel $m - 14$-nél kisebb számról már nem tudunk egy legalább $m - 14$-es nyerő helyzetre lépni.

Ilyen módon a nyerő helyzetek a következők ($k \geq 0$):

x-nyerő	1	2	3	4	5
szám	$m - 14k - 13$	$m - 14k - 12$	$m - 14k - 11$	$m - 14k - 10$	$m - 14k - 9$

x-nyerő	6	7	8	9	10
szám	$m - 14k - 6$	$m - 14k - 5$	$m - 14k - 4$	$m - 14k - 8$	$m - 14k - 7$

x-nyerő	11	12	nyerő mező	vesztő mező
szám	$m - 14k - 3$	$m - 14k - 2$	$m - 14k - 1$	$m - 14k$

Így ha m 14-gyel osztva 1 maradékot ad, akkor a másodiknak van nyerő stratégiája, minden más esetben a kezdőnek.