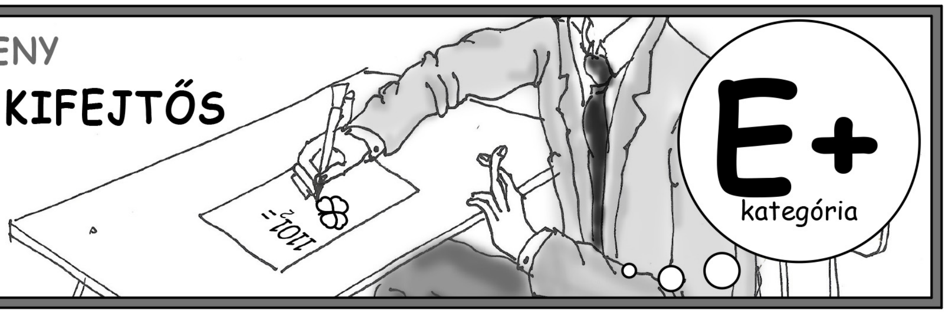
DÜRER VERSENY

MATEMATIKA KIFEJTŐS

9-12. OSZTÁLYOSOK

DÖNTŐ:
2020. FEBRUÁR 7.



1. Tekintsük a következőképpen definiált a_n és b_n sorozatokat: legyen $a_1 = 2$, $n > 1$ esetén pedig legyen $a_n = 2^{a_{n-1}}$. Legyen b_n az a_n 2020-szal vett osztási maradéka. Igazoljátok, hogy egy indextől kezdve a b_n sorozat állandó.

2. Legyen $H = \{-2019, -2018, ..., -1, 0, 1, 2, ..., 2020\}$. Adjátok meg az összes olyan $f : H \to H$ függvényt,
a) melyre $x = f(x) + f(f(x)) - f(f(f(x)))$ teljesül minden $x \in H$ esetén.
b) melyre $x = f(x) + 2f(f(x)) - 3f(f(f(x)))$ teljesül minden $x \in H$ esetén.

3. Adjatok meg minél több általános helyzetű egyenest a síkban úgy, hogy közülük bármely kettő rácspontban messe egymást.

4. Legyen ABC egy nem egyenlőszárú háromszög. Legyen I a háromszög beírt körének középpontja. Jelölje F_A az A-ból induló szögfelezőre I-ben állított merőleges és a BC egyenes metszéspontját. Hasonlóan definiáljuk F_B-t és F_C-t. Bizonyítsátok be, hogy az F_A, F_B és F_C pontok egy egyenesre esnek.

5. Bizonyítsátok be, hogy egy összefüggő $2n$ csúcsú 3-reguláris gráf olyan irányításainak száma, amelyben ugyanannyi 0 kifokú csúcs szerepel, mint 0 befokú, pontosan $2^{n+1}\binom{2n}{n}$.

6. Játék: A játék kezdetén a szervezők 4 kupac korongot helyeznek az asztalra. A soron következő játékos elvesz egy kupacot, majd egy másikat kettéoszt nemüres részekre. Az veszít, aki nem tud lépni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A kezdőállás ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XIII. Dürer Verseny szervezői