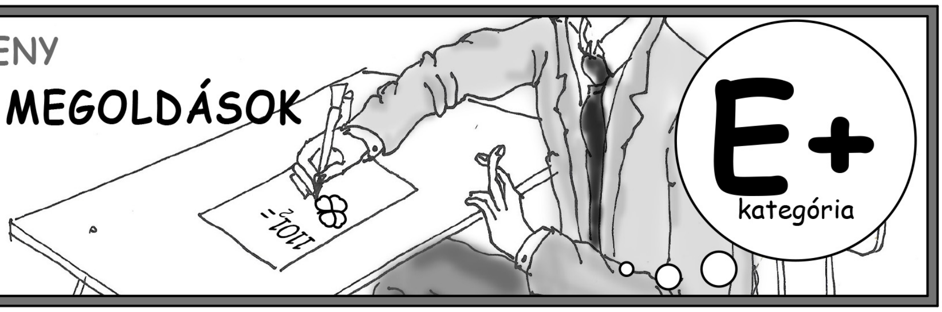
. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK

9-12. OSZTÁLYOSOK

DÖNTŐ:

2020. FEBRUÁR 7-9.



E+1. Tekintsük a következőképpen definiált a_n és b_n sorozatokat: legyen $a_1 = 2$, $n > 1$ esetén pedig legyen $a_n = 2^{a_{n-1}}$. Legyen b_n az a_n 2020-szal vett osztási maradéka. Igazoljátok, hogy egy indextől kezdve a b_n sorozat állandó.

Megoldás: Általánosabb állítást igazolunk. Legyen $m > 1$ tetszőleges pozitív egész, és legyen $b_n(m)$ az a_n m-mel vett osztási maradéka. Ekkor a $b_1(m), b_2(m), \ldots$ sorozat valamelyik indextől kezdve állandó minden m esetén. A feladat állítása az $m = 2020$ eset.

Az állítást m szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Világos, hogy $m = 2$ esetén a $b_n(2)$ sorozat konstans 0.

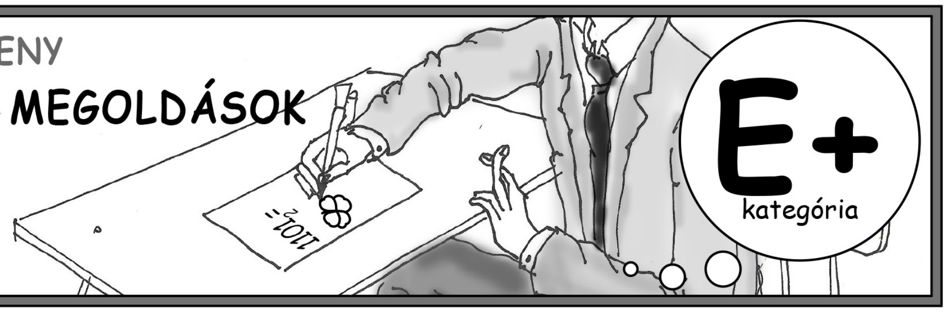
Tegyük fel, hogy már az összes m-nél kisebb egészre beláttuk az állítást, most igazoljuk m-re: Legyen $m = 2^c \cdot t$ alakú, ahol t egy páratlan szám. Ha $t = 1$, azaz m kettőhatvány, akkor a $b_n(m)$ sorozat valahonnan kezdve konstans 0, mivel az a_n sorozat egyre nagyobb kettőhatványokból áll.

Egy szám m-mel vett osztási maradékát egyértelműen meg tudjuk határozni, ha tudjuk a 2^c-vel vett osztási maradékát és a t-vel vett osztási maradékát. Így ha $c > 0$, akkor valamelyik n_0 indexre $b_n(2^c) = 0$ minden $n > n_0$ esetén, és az indukció miatt, mivel $t < m$, ezért létezik n_1 index, hogy n_1-től kezdve $b_n(t)$ állandó, így n_0 és n_1 maximumától kezdve $b_n(m)$ konstans.

Már csak az az eset maradt, amikor $c = 0$, azaz m páratlan, ekkor $(m, a_n) = 1$ minden n-re, mivel a_n kettőhatvány. Mivel $\varphi(m) < m$, így erre már tudjuk, hogy igaz az állítás, ahol φ az Euler-féle φ függvényt jelöli, azaz létezik n_0 index, ahonnan kezdve konstans a $b_n(\varphi(m))$ sorozat, ami átfogalmazható úgy, hogy $n > n_0$ esetén $\varphi(m) \mid a_n - a_{n-1}$. Ekkor az Euler-Fermat-tétel miatt $2^{a_n - a_{n-1}} \equiv 1 \pmod{m}$. Azt szeretnénk belátni, hogy valahonnan kezdve $b_n(m)$ konstans, ehhez elég azt igazolni, hogy valahonnan kezdve $m \mid a_{n+1} - a_n$, és ez igaz, ha $n > n_0$, mivel

$$a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - 2^{a_{n-1}} = 2^{a_{n-1}}(2^{a_n - a_{n-1}} - 1) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Ezzel az általánosabb állítást igazoltuk, amivel a feladat állítását is bizonyítottuk.



E+2. Legyen $H = \{-2019, -2018, ..., -1, 0, 1, 2, ..., 2020\}$. Adjátok meg az összes olyan $f : H \to H$ függvényt,
a) melyre $x = f(x) + f(f(x)) - f(f(f(x)))$ teljesül minden $x \in H$ esetén.
b) melyre $x = f(x) + 2f(f(x)) - 3f(f(f(x)))$ teljesül minden $x \in H$ esetén.

Megoldás: A megoldás során $f^n(x)$ jelöli azt, hogy az x számra n-szer alkalmazzuk az f függvényt.

a) A fenti jelölést használva az egyenlet $x = f(x)+f^2(x)-f^3(x)$ alakú. Helyettesítsünk $x = f(x)$-et az egyenletbe, ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(x) = f^2(x) + f^3(x) - f^4(x).$$

Ezt az egyenletet adjuk hozzá az előző egyenlethez:

$$x + f(x) = f(x) + 2f^2(x) - f^4(x)$$

Átrendezve:

$$x - f^2(x) = f^2(x) - f^4(x)$$

Indukcióval igazoljuk, hogy $x - f^2(x) = f^{2n}(x) - f^{2n+2}(x)$ teljesül minden n pozitív egészre. $n = 1$ esetén már láttuk, hogy igaz az állítás. Ha n-re igaz az állítás, akkor $x - f^2(x) = f^{2n}(x) - f^{2n+2}(x)$, ebbe $x = f^2(x)$-t helyettesítve kapjuk, hogy

$$f^{2n+2}(x) - f^{2n+4}(x) = f^2(x) - f^4(x) = x - f^2(x),$$

tehát $n + 1$-re is igaz az állítás, azaz beláttuk, hogy

$$x - f^2(x) = f^2(x) - f^4(x) = f^4(x) - f^6(x) = f^6(x) - f^8(x) = \dots,$$

így az $x, f^2(x), f^4(x), \dots$ sorozat egy számtani sorozat, melynek minden eleme a véges H halmazból való, így a sorozat állandó, vagyis $x = f^2(x)$.
Azok a függvények, melyekre $x = f^2(x)$ teljesül, valóban megoldások, hiszen ekkor $x = f(x)$-t helyettesítve kapjuk, hogy $f(x) = f^3(x)$ is teljesül, tehát $x = f(x) + f^2(x) - f^3(x)$.

b) Az f függvény injektív, mivel $f(i) = f(j)$ esetén

$$i = f(i) + 2f^2(i) - 3f^3(i) = f(j) + 2f^2(j) - 3f^3(j) = j$$

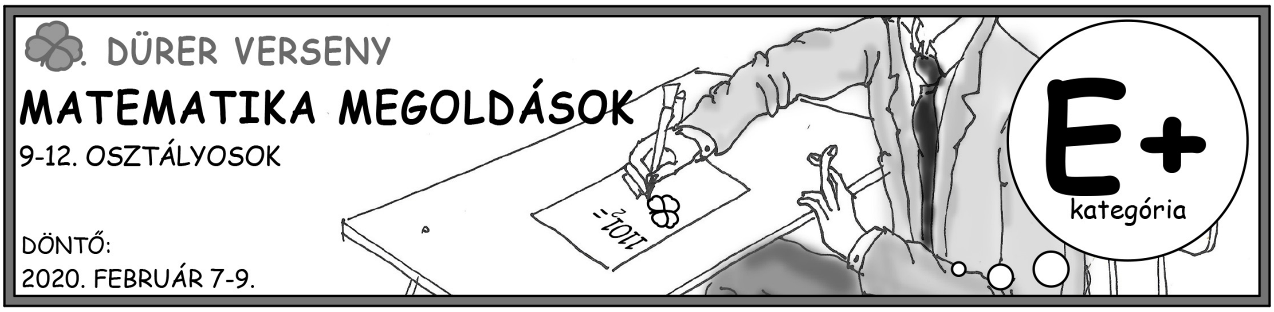
Mivel H egy véges halmaz, és f pedig H-ból H-ba képez, így f bijektív is, azaz
$f(-2019), f(-2018), \dots, f(2020)$ pontosan a H halmaz elemei valamilyen sorrendben. Erre még egyszer alkalmazva az f-et kapjuk, hogy az $f^2(-2019), f^2(-2018), \dots, f^2(2020)$ számok is pontosan a H elemei valamilyen sorrendben, és indukcióval minden n-re $f^n(-2019), f^n(-2018), \dots, f^n(2020)$ számok pontosan a H elemei. Így minden n-re

$$\sum_{i\in H} f^n(i) = \sum_{j=-2019}^{2020} j = 2020.$$

H minden elemét helyettesítsük be az eredeti egyenletbe, és adjuk össze ezeket az egyenleteket:

$$2020 = \sum_{i\in H} i = \sum_{i\in H} f(i)+2f^2(i)-3f^3(i) = \sum_{i\in H} f(i)+2\sum_{i\in H} f^2(i)-3\sum_{i\in H} f^3(i) = 2020+4040-6060 = 0,$$

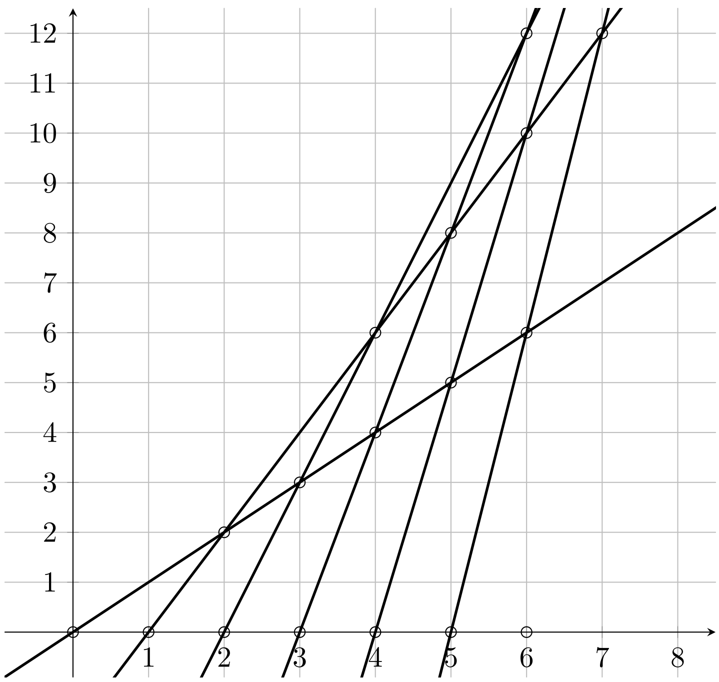
és ez ellentmondás, vagyis nincs ilyen függvény.



E+3. Adjatok meg minél több általános helyzetű egyenest a síkban úgy, hogy közülük bármely kettő rácspontban messe egymást.

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy tetszőleges n-re meg lehet adni n ilyen egyenest: Vegyünk n db olyan $ax + by = c$ egyenletű egyenest, ahol a, b, c racionális, és figyeljünk arra, hogy ezek általános helyzetűek legyenesk, világos, hogy ez megtehető. Két ilyen egyenes metszéspontját úgy kapjuk meg, hogy kifejezzük az egyenleteikből x-t és y-t, ehhez csak osztani, szorozni, összeadni, kivonni kell, és végig racionális számokkal dolgozunk, így a metszéspont koordinátái is racionálisak lesznek. Véges sok metszéspont van, mind racionális koordinátájú, legyen a törtekben előforduló nevezők legkisebb közös többszöröse A. Az egész ábrát az origóból a A-szorosára nagyítva már minden metszéspont egész koordinátájú lesz, így n-re egy megfelelő konstrukciót adtunk.

Azonban egyszerre végtelen sok egyenest is meg tudunk adni: Vegyük azokat az egyeneseket, amelyek n meredekségűek, és áthaladnak az $(n-1, 0)$ ponton minden n-re. Képlettel megadva, az $\{y = nx - n(n-1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ alakú egyeneseket.



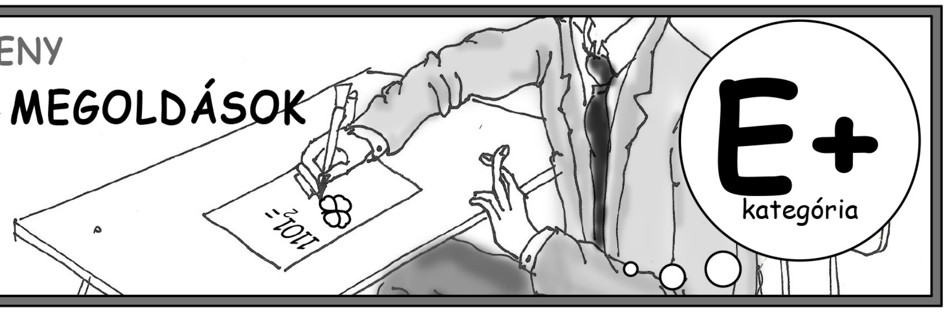
Megmutatjuk, hogy ezek is kielégítik a feladat feltételeit. Mivel különböző a meredekségük, ezért nincs két párhuzamos köztük, még azt kell igazolni, hogy bármely kettő rácspontban metszi egymást, és nincs olyan rácspont, amelyen 3 ilyen alakú egyenes is áthalad. Nézzük két ilyen alakú egyenes metszéspontját. Legyenek az egyenesek $y = nx - n(n-1)$ és $y = mx - m(m-1)$.

$$nx - n(n-1) = mx - m(m-1)$$

$$x = \frac{n(n-1) - m(m-1)}{n-m} = \frac{n^2 - m^2 + m - n}{n-m} = n + m - 1$$

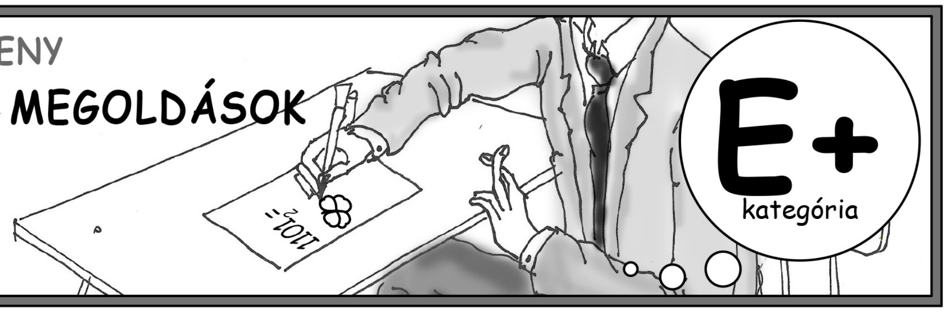
$$y = nx - n(n-1) = n(n+m-1) - n(n-1) = nm$$

Tehát a két egyenes metszéspontja az $(n+m-1, nm)$ pont, ami tényleg rácspont, és ezen a ponton nem megy át még egy ilyen alakú egyenes, mivel egy harmadik $y = kx - k(k-1)$ egyenes $(n+k-1, nk)$



pontban metszi az $y = nx - n(n-1)$ egyenest, ami nem ugyanaz, mint az előbbi metszéspont, mivel $n \neq m$ miatt az x és y koordinátái is eltérnek a két metszéspontnak. Ezzel megadtunk végtelen sok megfelelő egyenest.

Megjegyzés: Ezt már nem vártuk el, csupán érdekesség azoknak, akik hallottak már számosságokról: Megszámlálhatóan végtelen sok egyenest adtunk meg, ennél többet pedig nem is tudunk, hiszen több, mint megszámlálható sok általános helyzetű egyenesnek több, mint megszámlálható metszéspontja van, azonban csak megszámlálható sok rácspont van.

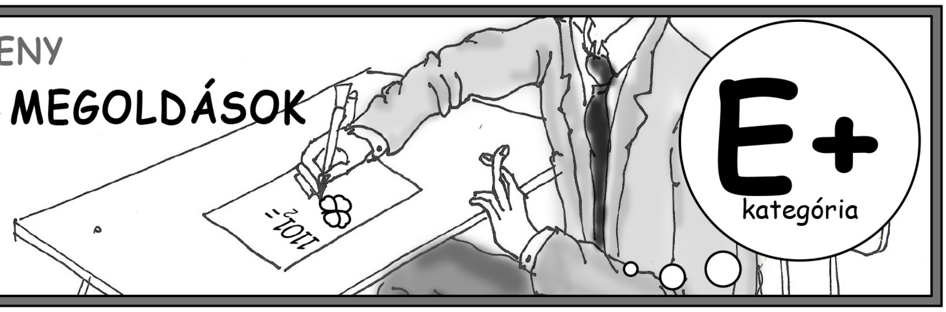


E+4. Legyen ABC egy nem egyenlőszárú háromszög. Legyen I a háromszög beírt körének középpontja. Jelölje F_A az A-ból induló szögfelezőre I-ben állított merőleges és a BC egyenes metszéspontját. Hasonlóan definiáljuk F_B-t és F_C-t. Bizonyítsátok be, hogy az F_A, F_B és F_C pontok egy egyenesre esnek.

1. Megoldás: Legyen ABC háromszög körülírt köre k, továbbá legyen az A-ból induló szögfelező és a k kör második metszéspontja D. Ismert, hogy D pont az A pontot nem tartalmazó BC ív felezőpontja és teljesül, hogy $DB = DI = DC$. Legyen a D középpontú, DI sugarú kör a k_A kör. A k és k_A körök hatványvonala a BC egyenes. Az I pontot körnek tekintve az I kör és a k_A kör hatványvonala a DI egyenesre, azaz az A-ból induló szögfelező egyenesére I-ben állított merőleges egyenes. Tehát az F_A pont ennek a két hatványvonalnak a metszéspontja, azaz rajta van a k kör és az I kör hatványvonalán is. Viszont ekkor logikai szimmetria miatt F_B és F_C is rajta van ezen az egyenesen, azaz a három pont egy egyenesre esik.

2. Megoldás: Legyenek e, f és g az ABC háromszög A-ból, B-ből és C-ből induló külső szögfelezői. Ezek rendre merőlegesek az AI, BI és CI szakaszokra, mivel azok belső szögfelezők, így az IF_A, IF_B és IF_C egyenesekel párhuzamosak. Az e, f és g egyenesek egy háromszöget zárnak körbe, mely háromszög csúcsai az ABC háromszög hozzáírt köreinek középpontjai. Ezek legyenek E, F és G. Ekkor az AE, BF és CG egyenesek egy ponton mennek át: I-n. Így alkalmazható az ABC és EFG háromszögekre a Desargues-tétel: az AB és EF, BC és FG, valamint a CA és GE egyenespárok metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.

Legyen $\lambda \in [0, 1]$, valamint E_λ, F_λ és G_λ az E, F és G pontok λ arányú nagyítottjai I-ből. Ekkor ezekre is alkalmazhatjuk a Desargues-tételt (az ABC háromszöggel): az ABC háromszög és az $E_\lambda F_\lambda G_\lambda$ háromszögek megfelelő oldalegyeneseinek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek. $\lambda = 0$-ban határértéket véve éppen az állítást kapjuk.



E+5. Bizonyítsátok be, hogy egy összefüggő $2n$ csúcsú 3-reguláris gráf olyan irányításainak száma, amelyben ugyanannyi 0 kifokú csúcs szerepel, mint 0 befokú, pontosan $2^{n+1}\binom{2n}{n}$.

Megoldás: Legyen $G(V, E)$ tetszőleges 3-reguláris összefüggő $2n$ csúcsú gráf. Egy irányításban forrásnak nevezzük a 3 kifokú csúcsokat és nyelőnek a 0 kifokú csúcsokat.

Tetszőleges irányításban $3n \equiv n \pmod 2$ összesen a csúcsok kifoka, mivel ennyi él van G-ben, így ha A azon csúcsok halmaza egy irányításban, melyeknek páratlan a kifoka, akkor $|A| \equiv n \pmod 2$ és emiatt $|B| = 2n - |A| \equiv n \pmod 2$, ahol B a páros kifokú csúcsok halmaza. Ezért ha egy B csúcshalmaz elemszáma nem azonos paritású n-nel, akkor nem létezik olyan irányítás, ahol pontosan a B-beli elemek kifoka páros. Legyen $B \subset V$ olyan részhalmaz, melyre $|B| \equiv n \pmod 2$. Azt állítjuk, hogy ekkor pontosan 2^{n+1} olyan irányítás van, melyben pontosan a B-beli csúcsok páros kifokúak.

Vegyünk egy feszítőfát. A feszítőfán kívüli $n+1$ élet irányítsuk meg tetszőlegesen, ezt 2^{n+1}-féleképpen tudjuk megtenni. Ezután ismételjük a következő lépéseket:

Vegyünk egy levelet, irányítsuk a hozzá tartozó élt úgy, hogy a levél kifokának paritása jó legyen, majd hagyjuk el a levelet. Kaptunk egy kisebb fát, ezen megint tudunk csinálni egy ilyen lépést, és ezt addig tudjuk folytatni, amíg már csak egy élből áll a fa. Ekkor ezt irányítsuk úgy, hogy az egyik végpontjának a kifokának a paritása stimmeljen. Ekkor a másik végpontjának is jó lesz a kifok paritása, mivel $|B| \equiv n \pmod 2$, és olyan irányítás nincs, ahol a páros kifokú csúcsok paritása nem egyezik meg n parításával. Így akárhogy is irányítjuk a feszítőfán kívüli éleket, pontosan egyféleképpen tudjuk befejezni, hogy egy olyan irányítást kapjunk, melyben pontosan a B-beli csúcsok páros kifokúak, vagyis 2^{n+1} ilyen irányítás van.

Még azt kell észrevenni, hogy a források és nyelők számának különbsége csak a B halmaz (a páros kifokú csúcsok halmaza) méretétől függ. Vegyünk egy tetszőleges irányítást, legyen benne x darab forrás, y darab nyelő, valamint legyen $|B| = b$. Ekkor $b-y$ darab 2 kifokú csúcs van és $2n-b-x$ darab 1 kifokú. A kifokok összege $3n$, így

$$2n - b - x + 2(b-y) + 3x = 3n$$

$$x - y = \frac{n-b}{2}$$

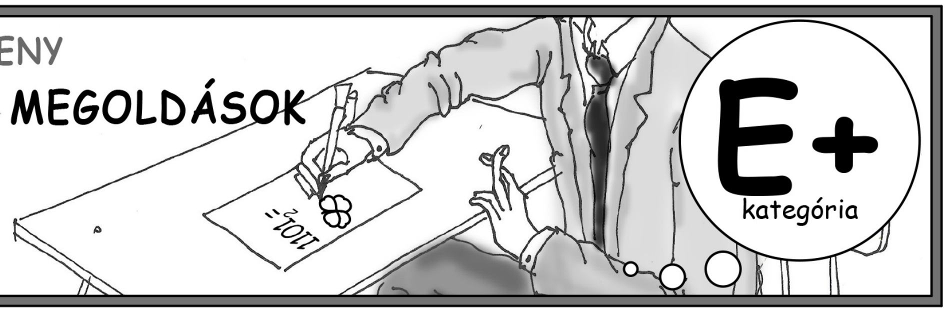
Tehát $x - y$ valóban csak b-től függ. Így az olyan irányítások száma, melyben $x - y = 0$, megyegyezik azon irányítások számával, melyekben $\frac{n-b}{2} = 0$ azaz $b = n$. Mivel $b \equiv n \pmod 2$, így tetszőleges $B \subset V$, $|B| = n$ esetén 2^{n+1} irányítás van, melyben pontosan a B-beli csúcsok páros kifokúak, és $\binom{2n}{n}$-féleképpen tudunk n-elemű B részhalmazát választani a csúcsoknak, így összesen $2^{n+1}\binom{2n}{n}$ megfelelő irányítás van.

2. bizonyítás arra, hogy minden $B \subset V$, $|B| \equiv n \pmod 2$ esetén 2^{n+1} megfelelő irányítás van:
Állítás 1: Minden $A \subset V$ páros elemű csúcshalmazhoz létezik G-nek olyan feszítő részgráfja, melyben pontosan az A-beli csúcsoknak lesz páratlan a foka.
Bizonyítás: Állítsuk párba az A-beli csúcsokat. Minden párhoz van olyan út G-ben, ami az egyik csúcsból a másikba megy, hiszen G összefüggő. Vegyünk minden párhoz egy ilyen utat, és egy élet pontosan akkor rakjunk be G-nek a H részgráfjába, ha páratlan sok útban szerepel. Ekkor H megfelelő lesz, mivel minden úton csak a két végpont páratlan fokú, így az utak összességében pontosan az A-beli csúcsok lesznek páratlan fokúak, és a csúcsok fokának parítása nem változik, ha pontosan azokat az éleket rakjuk H-ba, amelyek páratlan sok útban vannak benne.
Állítás 2: Ha $A, B \subset V$ és $|A|$ és $|B|$ azonos paritású, akkor ugyanannyi olyan irányítása van G-nek ahol pontosan az A-beliek páros kifokúak, mint ahol pontosan a B-beliek páros kifokúak.
Bizonyítás: Legyen A és B szimmetrikus differenciája C, ekkor $|C|$ páros, így van olyan $H \subset G$ feszítő részgráf, melyben pontosan a C-beli élek páratlan fokúak. Legyen S_A az a halmaz, amely

G azon irányításait tartalmazza, melyben pontosan az A-beli csúcsok páros kifokúak, és definiáljuk szimmetrikusan S_B-t. Ha S_A nem üres, akkor vegyünk belőle egy s irányítást. Ha a H-beli összes él irányát megfordítjuk, akkor pontosan a C-beli csúcsok kifokának paritása fog megváltozni, így egy olyan irányítást kapunk, ahol pontosan a B-beli elemek kifoka lesz páros. Így hozzárendeltünk s-hez egy S_B-beli irányítást. Minden S_A-ban lévő irányításhoz ilyen módon hozzá tudok rendelni egy S_B-belit, és nyilvánvalóan minden S_A-belihez különbözőt rendelünk, így $|S_A| \leq |S_B|$. Ugynaígy $|S_A| \geq |S_B|$ is teljesül, így $|S_A| = |S_B|$.

Tetszőleges irányításban $3n \equiv n \pmod 2$ a csúcsok kifoka összesen, mivel ennyi él van G-ben, így ha A azon csúcsok halmaza egy irányításban, melyeknek páratlan a kifoka, akkor $|A| \equiv n \pmod 2$, és így $|B| = 2n - |A| \equiv n \pmod 2$, ahol B a páros kifokú csúcsok halmaza. Emiatt ha egy B csúcshalmaz elemszáma nem azonos paritású n-nel, akkor hozzá nem létezik olyan irányítás, ahol pontosan a B-beli elemek kifoka páros, ha pedig $|B|$ azonos paritású n-nel, akkor ugyanannyi olyan irányítás létezik, amelyben pontosan a B-beliek páros kifokúak ,mint tetszőleges másik D halmazra, melyre $|D| \equiv n \pmod 2$ a második állítás miatt.

Összesen 2^{3n}-féle irányítás van, és 2^{2n-1} olyan $B \subset V$ részhalmaz van, melyre $|B| \equiv n \pmod 2$, és ezekhez mind ugyanannyi irányítás tartozik, így minden $B \subset V$ részhalmazhoz melyre $|B| \equiv n \pmod 2$ pontosan 2^{n+1} olyan irányítás van, melyben pontosan a B-beli csúcsok páros kifokúak.



E+6. **Játék:** A játék kezdetén a szervezők 4 kupac korongot helyeznek az asztalra. A soron következő játékos elvesz egy kupacot, majd egy másikat kettéoszt nemüres részekre. Az veszít, aki nem tud lépni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A kezdőállás ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Nyerő állásnak nevezzük azt, ahova lépve egy játékos nyer.

Akkor nem tud valaki lépni, ha minden kupacban 1 korong maradt, tehát az $(1,1,1,1)$ egy nyerőállás.

Sőt, az összes (ptl, ptl, ptl, ptl) alakú helyzet nyerőállás. Hiszen egy ilyen helyzetből a (ps, ptl, ptl, ptl) típusú állás érhető el, ebből pedig az ellenfél visszaállíthatja a csupa páratlan helyzetet (a kupacok sorrendjének nincs jelentősége). Tehát a (ps, ptl, ptl, ptl) állás vesztőhelyzet. Hasonlóan látható, hogy a (ps, ps, ptl, ptl) állás is az.

Így már csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, ha legfeljebb egy páratlan kupac van. Ha ezekben az esetekben egy játékos egy páros kupacot két páratlan részre bontana, akkor elvesztené a játékot (hiszen az ellenfele elérhetné, hogy csupa páratlan kupac maradjon). Ha ilyen lépéseket nem engedünk meg, akkor ezt a változatot *módosított játék*nak hívjuk.

Megmutatjuk, hogy a módosított játék $(2a, 2b, 2c, 2d)$, ill. $(2a, 2b, 2c, 2d-1)$ állásaiból indított lejátszások megfeleltethetőek egymásnak. Ennek meggondoláshoz érdemes egy pótkorongot hozzávenni a páratlan kupachoz. Egy páratlan kupac szétosztásakor a pótkorong kerüljön abba a kupacba, ahol páratlan sok korong van. A pótkoronggal kiegészített (módosított) játék megfelel egy $(2a, 2b, 2c, 2d)$ (módosított) játéknak, meggondolható, hogy a megengedett lépések kölcsönösen egyértelműek.

A befejező lépésben a módosított játékot visszavezetjük az eredeti játékra. A módosított játék $(2a, 2b, 2c, 2d)$ (vagy $(2a, 2b, 2c, 2d-1)$) állását megfeleltethetjük az eredeti játék (a, b, c, d) állásának. A módosított játék minden lépését kettővel osztva egy jó megfeleltetést kapunk (ennek meggondolását újra az olvasóra bízzuk).

A módosított játék megnyerése alapján az eredeti játékot is könnyen tudjuk jól játszani. Így összességében az eredeti játék lejátszását visszavezettük fele akkora méretű kupacokra. Ezek alapján meghatározhatjuk a nyerőhelyzetek, és ehhez hasonlóan azt is tudjuk, hogy mit kell lépni egy adott helyzetben.