. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA VÁLTÓ

9-12. OSZTÁLYOSOK

DÖNTŐ:

2020. FEBRUÁR 8.

E+

kategória

E$^+$-1. Tudjuk, hogy n egy pozitív egész, melynek számjegyösszege 100. Ha $44n$ számjegyeinek az összege 800, mennyi $3n$ számjegyeinek az összege? (3 pont)

E$^+$-2. Egy hatszög minden szöge azonos nagyságú, és négy egymást követő oldala $7, 6, 3$, valamint 5 egység hosszú. Hány egység a hatszög két kimaradó oldalának hosszának összege? (3 pont)

E$^+$-3. A Pascal háromszög egy módosítását úgy kapjuk meg, hogy a legelső sorba egy 2-est és egy 3-ast írunk, a többi sorban pedig minden szám a felette lévő két szám összege (a sor elején és végén pedig 2 illetve 3 áll). Mennyi lesz a 13-adik sorban balról az ötödik helyen álló szám?

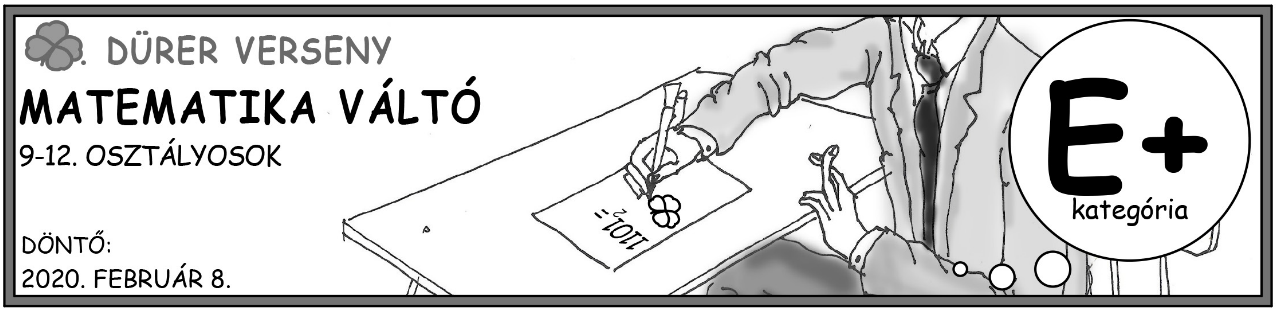
$$\begin{array}{ccccccc} & & 2 & & 3 & & \\ & 2 & & 5 & & 3 & \\ 2 & & 7 & & 8 & & 3 \\ & & & \dots & & & \end{array}$$

(3 pont)

E$^+$-4. A Mikulás kitalálós játékot játszik Marvinnal, mielőtt odaadná neki az ajándékát, amit 100 ajtó egyike mögött rejtett el (az ajtók 1-től 100-ig vannak megszámozva). Marvin rákérdezhet egy ajtóra, és a Mikulás a következőképpen válaszol rá: ha a kérdezett ajtó mögött van az ajándék, azt mondja: *forró*, ha az ajándék ajtajának száma és a kérdezett ajtó száma legfeljebb 5-tel különbözik, azt mondja: *meleg*, ha pedig többel különbözik, akkor azt mondja: *hideg*. Legalább hány kérdés kell Marvinnak ahhoz, hogy biztosan tudhassa, melyik ajtó mögött van az ajándéka? (3 pont)

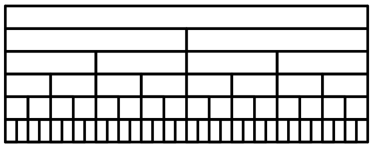
E$^+$-5. Felírtuk egy lapra azon pozitív egész számokat, melyeknek minden valódi osztója 30-nál kisebb. Ha tudjuk, hogy a lapon szereplő, pontosan egy valódi osztóval rendelkező számok összege 2397, akkor mennyi az összege a lapon szereplő, pontosan két valódi osztóval rendelkező számoknak?
Egy pozitív egész n számnak k szám akkor valódi osztója, ha $k \mid n$ és $1 < k < n$. (4 pont)

E$^+$-6. Az a,b,c pozitív egészek kisebbek, mint 2020. Tudjuk, hogy a osztja $b+c$-t, b osztja $a+c$-t és c osztja $a+b$-t. Hány ilyen rendezett számhármas van?
Megjegyzés: Egy rendezett számhármasban számít a számok sorrendje, tehát a $(0, 1, 2)$ *rendezett számhármas nem ugyanaz, mint a* $(2, 0, 1)$ *rendezett számhármas.* (4 pont)



E$^+$-7. Egy urnában piros és kék golyók vannak, összesen 1024. Egy körben páronként kihúzzuk őket, majd miután mindet kihúztuk, minden golyópár helyére egy golyót teszünk a következő szabály szerint: ha két pirosat húzunk ki, akkor pirosat, ha két kéket, akkor kéket, ha egy pirosat és egy kéket, akkor feketét, ha egy pirosat és egy feketét, akkor pirosat, ha egy kéket és feketét, akkor kéket, ha két feketét, akkor egy fekete golyót rakunk vissza a következő körre. A 10. kör után egy piros golyó marad. Legfeljebb hány kék golyó lehetett kezdetben? (4 pont)

E$^+$-8. Somának van egy 6 szintes, 63 téglából álló tornya, amely egyre szélesebb téglákból áll. Felülről a k-adik szinten 2^{k-1} darab tégla van ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), és minden tégla, ami nem a legalsó szinten van, pontosan 2 darab, egy szinttel alatta lévő téglán helyezkedik el (lásd az ábrán). Soma egyesével elvesz 7 téglát a tornyából úgy, hogy csak olyan téglát vehet el, amin már nincs más tégla. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha az elvétel sorrendje is számít? (4 pont)

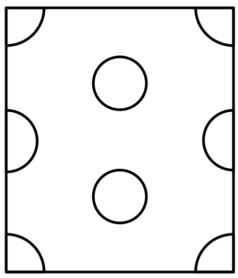


E$^+$-9. Az $ABCD$ konvex négyszögről tudjuk, hogy $|AB| = 8$, $|BC| = 29$, $|CD| = 24$, és $|DA| = 53$. Mekkora a négyszög területe, ha $ABC\sphericalangle + BCD\sphericalangle = 270°$? (5 pont)

E$^+$-10. Egy 2×5-ös táblázat első oszlopában lévő alsó mezőt kiszínezzük, majd utána egyesével a táblázat többi mezőjét is úgy, hogy csak színes mező (közös éllel rendelkező) szomszédját színezhetjük ki. Hányféle sorrendben színezhetjük ki a teljes táblázatot? (5 pont)

E$^+$-11. Az $ABC\triangle$-be egy négyzetet írunk úgy, hogy a négyzet egyik oldala az AC oldalra esik, és a másik két csúcs az AB és BC oldalakra esik. Ezenkívül tudjuk, hogy $AC = 5$, $BC = 4$, $AB = 3$. A négyzet a háromszögből három kisebb háromszöget vág le. Ha p és q relatív prímek, és $\frac{p}{q}$ az ezen kisebb háromszögek beírt köreinek sugarainak reciprokösszege, akkor mennyi $p + q$? (5 pont)

E$^+$-12. Az ábrán lévő 8 mezőbe szeretnénk beleírni két-két A, B, C, illetve D betűt úgy, hogy az azonos betűvel rendelkező mezőket össze lehessen kötni a téglalapon belül egy-egy folytonos vonallal, egymást nem metszve. Hányféle ilyen kitöltés létezik? (5 pont)



. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA VÁLTÓ

9-12. OSZTÁLYOSOK

DÖNTŐ:

2020. FEBRUÁR 8.

E+

kategória

E$^+$-13. A kockapókerben 5 kockával kell különböző kombinációkat kidobni. Egy körben háromszor lehet dobni, és a második illetve harmadik dobásnál a játékos döntheti el, hogy melyik kockákat dobja újra. Mekkora az esélye, hogy valaki hatos pókert (azaz legalább 4 darab hatost) dobjon egy körben, ha optimális stratégiával játszik?
A választ írjátok fel $\frac{p}{q}$ alakban, ahol $(p, q) = 1$, és a megoldás a p prímtényezőinek összege multiplicitással számolva. Például $\frac{p}{q} = \frac{3^4 \cdot 11}{2^5 \cdot 5}$-re a válasz $4 \cdot 3 + 11 = 23$ lenne. (6 pont)

E$^+$-14. Egy moziteremben 6 VIP szék van egymás mellett, 1-től 6-ig megszámozva. Blokknak nevezünk néhány egymás melletti szabad széket. Az online foglalás során egy hely lefoglalása két lépésből áll: az első lépésben ki kell választani, hogy melyik blokkban akarunk helyet foglalni, majd a második lépésben azt, hogy annak a blokknak az első, utolsó vagy középső székét foglaljuk le (páros sok székből álló blokk esetén a kisebb sorszámú középsőt). (Második lépésben a rendszer mindig felajánlja mind a három lehetőséget, még akkor is ha ezek nem jelentenek különböző székeket.) Benedek az egyik előadásra mind a 6 VIP helyet lefoglalta. Hányféleképpen tehette ezt meg Benedek, ha két esetet akkor nevezünk különbözőnek, ha van olyan lépés, amiben Benedek más opciót választott?
Például ha a 2-es és a 6-os VIP szék lenne lefoglalva, az első blokk az 1-es, a második blokk pedig a 3-as, 4-es és 5-ös székek lennének. Két foglalási sorrendet különbözőnek tekintünk, ha a sorszámok foglalási sorrendje nem azonos, vagy ha van olyan szék, amelyet a két foglalási sorrendben különböző elhelyezkedéssel (első/utolsó/középső székként a blokkban) foglaltak le. Tehát ha 2 VIP szék lenne, 9 lenne a válasz. (6 pont)

E$^+$-15. Az f függvény a pozitív egészeken van értelmezve, és ha n prímtényezős felbontása $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{k_t}$, akkor $f(n) = (p_1 - 1)^{k_1+1}(p_2 - 1)^{k_2+1} \cdot \ldots \cdot (p_t - 1)^{k_t+1}$. Ezt a függvényt egymás után alkalmazva, tetszőleges számról indulva egy idő után eljutunk az 1-be. Melyik az a legkisebb szám, amelyre ehhez pontosan 6 lépés szükséges? (6 pont)

E$^+$-16. Dórának van 10 rúdja, melyek hosszai $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ és 10 cm. Dóra kiválaszt ezekből négyet, majd egy trapézt rak össze belőlük (mint oldalakból). Hányféle különböző trapézt kaphat?
Két trapéz különböző, ha nem egybevágó. (6 pont)

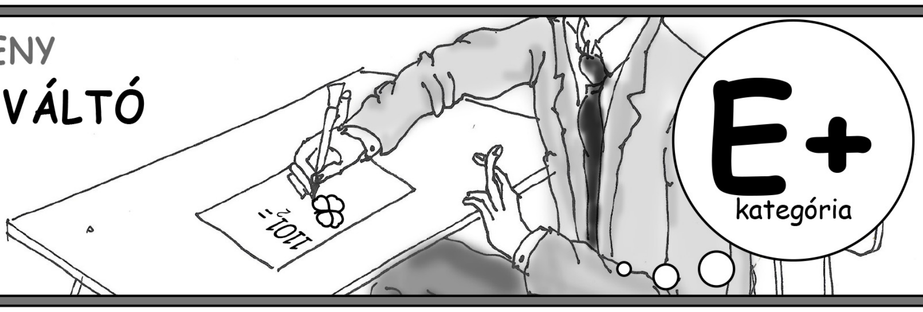
DÜRER VERSENY

MATEMATIKA VÁLTÓ

9-12. OSZTÁLYOSOK

DÖNTŐ:

2020. FEBRUÁR 8.



#	MO	A feladat szövege	P
E^+-1	300	Tudjuk, hogy n egy pozitív egész, melynek	3p
E^+-2	9	Egy hatszög minden szöge azonos nagyságú,	3p
E^+-3	1650	A Pascal háromszög egy módosítását	3p
E^+-4	12	A Mikulás kitalálós játékot játszik	3p
E^+-5	7282	Felírtuk egy lapra azon pozitív egész számokat,	4p
E^+-6	9084	Az a,b,c pozitív egészek kisebbek,	4p
E^+-7	880	Egy urnában piros és kék golyók vannak,	4p
E^+-8	4976	Somának van egy 6 szintes, 63 téglából	4p
E^+-9	420	Az $ABCD$ konvex négyszögről tudjuk,	5p
E^+-10	1920	Egy 2×5-ös táblázat első	5p
E^+-11	42	Az $ABC\triangle$-be egy négyzetet	5p
E^+-12	1560	Az ábrán lévő 8 mezőbe szeretnénk	5p
E^+-13	259	A kockapókerben 5 kockával kell	6p
E^+-14	4824	Egy moziteremben 6 VIP szék van	6p
E^+-15	283	Az f függvény a pozitív egészeken	6p
E^+-16	455	Dórának van 10 rúdja, melyek hosszai	6p