XIV. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA

megoldások

Helyi forduló:
2020. november 20.

C kategória

9-10. osztályosok

C1. Andris azt vette észre, hogy ha összeszorozza, hogy hány éves ő, a 8 évvel fiatalabb húga és a dédapja, akkor épp az idei évszámot kapja, azaz 2020-at. Melyikük milyen idős?

Megoldás: A 2020 a számelmélet alaptétele szerint egyértelműen írható prímek szorzataként. $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, így mindenképpen lennie kell az életkoraik között egy 101-gyel osztható számnak.

Andris vagy a húga nem lehet legalább 101 éves, mert akkor a dédapjuk legfeljebb $2020/101 = 20$ éves lehetne, és nyilvánvalóan nem lehet fiatalabb a dédunokáinál. Tehát a dédnagypapa életkora osztható 101-gyel.

Ha a dédnagypapa legalább 404 éves lenne (igen, ez meglepő lenne, de senki nem mondta, hogy dédnagypapa ember), akkor Andris és a húga is legfeljebb $2020/404 = 5$ évesek, így kevesebb, mint 8 év lenne közöttük.

Ha a dédnagypapa 202 éves lenne (azért még ez is impresszív lenne), akkor Andris és a húga életkorainak szorzata 10, azaz vagy 10 és 1 évesek, vagy 5 és 2, de egyik opció sem lehetséges, mert nem 8 az életkoraik közötti különbség.

Ebből következik, hogy a dédnagypapa 101 éves, így Andris és a húga életkorának a szorzata $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

A 20 két pozitív egész szám szorzataként a következőképpen írható fel: $1 \cdot 20$, $2 \cdot 10$, vagy $4 \cdot 5$. Azt is tudjuk, hogy Andris és a húga között 8 év a különbség, és ennek a feltételnek csak a $2 - 10$ számpáros felel meg. Tehát Andris 10, húga 2 és a dédnagypapa 101 éves.

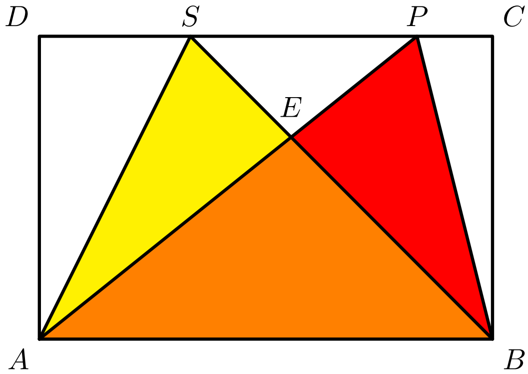
C2. Kilenc indián törzs választást tart, hogy keletre vagy nyugatra induljanak új vadászmezőket felkutatni. Minden törzsben kilenc harcos van, és a törzsek egyszerű többséggel döntenek. A törzsek hírvivői összegyűlnek a Nagy Fenyő alatt, és elmondják, hogyan döntött a törzsük. Amelyik irányra több törzs voksolt, arra indulnak.
a) Előfordulhat-e, hogy a 81 indián többsége nyugatra indulna, mégis kelet felé veszik az útjukat?
b) Végül 5 törzs nem jelent meg a tanácson, valamint kiderült, hogy a maradék négyből is csak négy-négy harcos szavazott. Igaz-e, hogy ha ekkor nyugatra indultak, akkor a szavazásban részt vevő 16 indián többsége tényleg ezt akarta, feltéve, hogy mind a négy törzs egyértelműen el tudta dönteni, hogy melyik irányba szeretne indulni?

Megoldás: a) Igen, lehetséges. Ha például van 5 törzs, amelyeknek egyenként öt-öt tagja keletre szavaz, akkor az összes többi indián akár nyugatra is szavazhat, keletre fognak indulni. Lesz ugyanis legalább 5 olyan törzs, ahol a 9 harcos közül legalább 5 választja a keleti-, és legfeljebb 4 a nyugati irányt, így ezek a törzsek keletre indulnának. Emiatt a 9 törzs közül lesz legalább 5 olyan, amelyik keletre indulna, de legfeljebb csak 4, amelyik nyugatra, tehát az irány egyértelműen: kelet.

Tehát elég, ha $5 \cdot 5 = 25$ harcos preferálja a keleti irányt, akiknek a száma kevesebb, mint a többi 56 harcos.

b) Most a törzsek száma páros. Tudjuk, hogy nem volt döntetlen a törzsek hírvivői általi szavazáson, ezért a négyből legalább 3 hírvivő által képviselt törzs szavazott nyugatra. Ahhoz, hogy ezek a törzsek maguk között a nyugatot válasszák, ugyanígy az szükséges, hogy a törzseken belül legalább három-három harcos szavazzon nyugatra (különben vagy a keletre szavazók lennének többségben; vagy ugyanannyian lennének, de akkor döntetlen lenne, amit a feladat kizárt).

Tehát feltéve, hogy nyugatra indultak, legalább $3 \cdot 3 = 9$ harcosnak kellett nyugatra szavaznia, ami a 16 harcosnak valóban több, mint a fele.



C3. Csenge téglalap alakú ablakára ragasztott egy sárga és egy piros fóliát, hogy reggel színes fények játsszanak a szobájában. Ahol a két fólia fedi egymást, ott narancssárga színt kapott. Az ablak 80 cm magas, 120 cm széles, sarkait az ábra szerint A, B, C és D jelöli. A két fólia háromszög alakú, két-két csúcsuk egybeesik az ablak két alsó sarkával, A-val és B-vel. A sárga fólia harmadik csúcsa, S, a DC oldal D-hez közelebbi harmadolópontja, míg a piros fólia harmadik csúcsa, P, az SC szakasz C-hez közelebbi negyedelőpontja. A tisztán piros rész – azaz a BPE háromszög – területe 16 dm^2. Mekkora az ablak azon részének területe, amelyre nem ragasztott fóliát Csenge?

1. Megoldás: Határozzuk meg az S és az P pont távolságát a csúcsoktól. Mivel S harmadolópont, így $|DS| = \frac{120\text{cm}}{3} = 40$ cm és $|SC| = 80$ cm. P pedig negyedeli az SC szakaszt, azaz $|PC| = \frac{80cm}{4} = 20$ cm.

Mivel ASD olyan derékszögű háromszög, amelynek mindkét befogója ismert, a területe meghatározható: $T_{ASD} = \frac{80\text{ cm}\cdot 40\text{ cm}}{2} = 1600\text{ cm}^2 = 16\text{ dm}^2$. Hasonlóképpen határozhatjuk meg az SBC derékszögű háromszög területét, mivel annak is ismerjük a két befogóját. A területe: $T_{SBC} = \frac{80\text{ cm}\cdot 80\text{ cm}}{2} = 3200\text{ cm}^2 = 32\text{ dm}^2$.

Határozzuk meg a PSE és a PBC háromszögek területösszegét is! Használjuk fel, hogy az SBC háromszög területe a PSE, a BPE és az PBC háromszögek területeinek az összege, így a PSE és a PBC háromszögek területeinek összege megyegyezik az SBC és a BPE háromszögek területeinek a különbségével. Azaz $T_{PSE} + T_{PBC} = T_{SBC} - T_{BPE} = 32\text{ dm}^2 - 16\text{ dm}^2 = 16\text{ dm}^2$.

A három fehér rész összterülete ez alapján: $T_{ASD} + (T_{PSE} + T_{PBC}) = 16\text{ dm}^2 + 16\text{ dm}^2 = 32\text{ dm}^2$.

2. Megoldás: Az $ABCD$ téglalap területét ki tudjuk számolni: $T_{ABCD} = 120\text{ cm}\cdot 80\text{ cm} = 9600\text{ cm}^2$. Ezután még meghatározzuk az ABS háromszög területét. Ha a fehér területet T_{feher}-rel jelöljük, akkor $T_{ABCD} = T_{ABS} + T_{BPE} + T_{feher}$ összefüggés ismert, így ebből már ki tudnánk számolni T_{feher}-et.

Ismert a háromszög területképlete: $T = \frac{a\cdot m_a}{2}$, ahol a egy oldal, és m_a a hozzá tartozó magasság. Megmutatjuk, hogy az ABS háromszög AB oldalához tartozó magasság hossza megegyezik a téglalap AD oldalának hosszával, amiről ismert, hogy 80 cm.

Az S csúcsból induló magasság merőleges az AB oldal egyenesére, és mivel AB egyenese párhuzamos DC egyenesével, így tetszőleges, DC-n lévő pontból az AB egyenesre állított merőleges szakasz hossza azonos a két egyenes távolságával. Tehát az ABS háromszög területe AB hossza szorozva az AD oldal hosszával, majd osztva kettővel. Így $T_{ABS} = \frac{120\text{ cm}\cdot 80\text{ cm}}{2} = 4800\text{ cm}^2$ (ami éppen fele a téglalap területének).

Mivel $16\text{ dm}^2 = 1600\text{ cm}^2$, $T_{feher} = T_{ABCD} - T_{ABS} - T_{BPE} = (9600 - 4800 - 1600)\text{ cm}^2 = 3200\text{ cm}^2 = 32\text{ dm}^2$, ekkora a fólia nélküli részek összterülete.

C4. A vadnyugaton minden rablóbanda 5 vagy 7 tagot számlál. Egy alkalommal néhány banda ökölvívó bajnokságot rendezett. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer mérkőzött, kivéve persze a saját bandájának tagjait. Minden mérkőzésnek volt egy győztese és egy vesztese. Legfeljebb hány bandatag vett részt a bajnokságon, ha tudjuk, hogy pontosan 16-an voltak, akik valamelyik mérkőzésükön nyertek?

Megoldás: Vizsgáljuk meg, hogy hány olyan banda lehet, amelynek van olyan tagja, aki minden mérkőzését elvesztette, azaz nem nyerte meg egyiket mérkőzését sem. Legfeljebb csak egy ilyen banda lehet! Ugyanis, ha van egy bandában olyan ember, akire ez teljesül, akkor az összes többi banda minden tagja megmérkőzött vele, így más bandák tagjai legalább egy mérkőzésüket megnyerték (legalábbis ez ellen az ember ellen biztosan nyertek). Tehát legfeljebb egy bandában lehet olyan ember, aki nem nyert legalább egy mérkőzésen.

Most nézzük azokat a bandákat, amelyeknek nincs olyan tagja, akit mindenki megvert volna. Megmutatjuk, hogy ezeknek a bandáknak az összlétszáma legfeljebb 15. A feladat feltétele szerint nem lehetnek 16-nál többen, ezért 7 tagú bandából csak 0, 1 vagy 2 ilyen lehet.

- Ha nincs héttagú banda, akkor legfeljebb 3 darab 5 tagú lehet, ami maximum 15 ember.
- Amennyiben 1 db 7 tagú banda van, amellett legfeljebb 1 db 5 tagú lehet ($7 + 2 \cdot 5 = 17$, ami már sok), ekkor legfeljebb 12 ezeknek a bandáknak az összlétszáma.
- Végül, ha két darab héttagú banda van, akkor melléjük már nem fér el öttagú, hiszen $2 \cdot 7 + 5 = 19 > 16$, ezért ekkor $2 \cdot 7 = 14$ lenne a maximális lehetséges létszámuk.

Ezek alapján tudjuk, hogy azon bandák tagjainak az összlétszáma legfeljebb 15, amelyekben nincs olyan ember, aki nem nyert. Emellett legfeljebb egy olyan banda van, amelynek van olyan tagja, aki nem nyert mérkőzést, és ez a banda legfeljebb 7 fős. Ebből az következik, hogy az összes résztvevők száma legfeljebb $15 + 7 = 22$ volt. Ráadásul ez csak úgy lehetett, hogy három 5 fős és egy 7 fős banda tagjai vettek részt a bajnokságban, és az 5 fős bandáknak nincs olyan tagjuk, aki ne nyert volna.

A megoldáshoz meg kell vizsgálni azt is, hogy ez valóban előfordulhatott. Mutatunk egy lehetséges példát:

- a 7 fős banda 6 tagja elvesztette az összes mérkőzését
- a 7 fős banda hetedik tagja legalább egyet, de tetszőleges számút nyert
- a három 5 fős banda egymás közti mérkőzésein tetszőleges eredmény született.

Ekkor valóban $3 \cdot 5 + 1 = 16$ azok száma, akik legalább egy mérkőzésen győzedelmeskedtek. Tehát az összes banda tagjainak maximális összlétszáma 22.

C5. Albrechtnek a matematika dolgozatában az $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$ egyenletet kellett megoldani, ahol a, b, c számjegyeket jelölnek. Azonban rosszul másolta le a feladatot, így ő az $abc = ab + bc + ca$ egyenletet oldotta meg a pozitív egészek körében.

a) Mi volt az eredeti feladat helyes megoldása?

b) Milyen eredményt kapott Albrecht?

Megjegyzés: Az $\overline{xy}$ jelölés az x, y számjegyek egymás mellé írásával készült többjegyű számot jelöli, az xy pedig x és y szorzatát.

Megoldás: a) a, b és c is szerepel többjegyű szám legnagyobb helyiértékén, ezért mindegyik értéke legalább 1. Az $\overline{abc}$ alakú szám értéke $100a + 10b + c$, és hasonlóan $\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{bc} = 10b + c$, és $\overline{ca} = 10c + a$. Írjuk be ezeket az eredeti egyenletbe: $(100a + 10b + c) = (10a + b) + (10b + c) + (10c + a)$.

Vigyük egy oldalra és vonjuk össze az azonos változókat tartalmazó tagokat! Az így kapott egyenlet: $89a = b + 10c$. b és c is legfeljebb 9, ezért $b + 10c \leq 9 + 10 \cdot 9 = 99$, tehát az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés legfeljebb 99. Emiatt a nem lehet 1-nél nagyobb, hiszen akkor $89a \geq 89 \cdot 2 = 178 > 99$ lenne. $a \geq 1$ is feltétel volt, tehát ha van megoldás, akkor $a = 1$ mindenképpen. Ebből azt kapjuk, hogy $b + 10c = 89$. $10c$ osztható 10-zel, ezért b tízes maradéka megegyezik a 89 tízes maradékával, tehát $b = 9$, és így $c = 8$.

Az eredeti feladatnak az $a = 1, b = 9, c = 8$ számhármas valóban megoldása, erről meggyőződhetünk behelyettesítéssel: $198 = 19 + 98 + 81$.

b) Megfigyelhetjük, hogy ha az egyenletben tetszőleges két betűt felcserélünk, attól az egyenlet ugyanaz marad. Emiatt elegendő azokat a megoldás számhármasokat megtalálnunk, ahol $a \leq b \leq c$, hiszen az ilyen megoldásokból a számok páronkénti felcserélgetésével Albrecht feladatának összes többi megoldása is megkapható.

a, b és c pozitív egészeket jelölnek, tehát egyik sem 0. Emiatt az egyenletet oszthatjuk a szorzatukkal, abc-vel, és ezzel a kapott egyenlet megoldásai pontosan ugyanazok maradnak, mint az $abc = ab + bc + ca$ egyenlet megoldásai. Az osztással kapott egyenlet: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Ezt megoldhatjuk úgy, hogy sorban megnézzük a, majd b lehetséges értékeit, mivel nincs sok lehetőség. Először tegyünk becslést a-ra. $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ pozitív, ezért $\frac{1}{a} < 1$ (különben a bal oldalon az összeg nagyobb lenne 1-nél), emiatt $a \geq 2$. Ugyanakkor $a \leq 3$, mivel ha $a \geq 4$ lenne, akkor b és c is legalább 4 kellene, hogy legyen, de ekkor az összegük legfeljebb $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ lenne, vagyis nem lehetne 1.

Ez alapján $a = 2$ vagy $a = 3$. Nézzük meg az eseteket:

1. eset: $a = 2$. Ezt beírva az egyenletbe, azt kapjuk, hogy $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ Most a-hoz hasonlóan b-t is becsüljük! $\frac{1}{c}$ pozitív, ezért $\frac{1}{c} < \frac{1}{2}$, ami miatt $c \geq 3$. Másrészt, $b \leq 4$, különben b és c is legalább 5 lenne, így a reciprokösszegük legfeljebb csak $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ lehetne.

   Nézzük meg b két lehetséges értékét:

   (a) eset: $b = 3$, ekkor $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, tehát $c = 6$. A $(2, 3, 6)$ számhármas megoldása Albrecht egyenletének: $2 \cdot 3 \cdot 6 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = 36$ Az a, b, c változók mind a 6 lehetséges sorrendjükben megkaphatják a 2, 3, 6 értékeket, amelyek mindegyike egy-egy jó megoldás.

   (b) eset: $b = 4$, ekkor $\frac{1}{c} = \frac{1}{4}$, tehát $c = 4$. A $(2, 4, 4)$ számhármas megoldás: $2 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 32$. Nyilván megoldás a $(4, 2, 4)$ és a $(4, 4, 2)$ is.

2. eset: $a = 3$. Mivel b és c is legalább akkora, mint a, a reciprokaik legfeljebb akkorák, mint a reciproka, vagyis $\frac{1}{3}$. Így az összegük legfeljebb $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. Az egyenlőség pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $a = b = c = 3$. Ez is ad egy megoldást. Ebből a számhármasból nem tudunk cserélgetéssel tőle különböző megoldást készíteni: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27$.

Megvizsgáltunk minden esetet. Az Albrecht által megoldott feladat megoldásai az $(a, b, c) = (2, 3, 6)$, a $(2, 4, 4)$ és a $(3, 3, 3)$ számhármasok, valamint ezekből a számok felcserélésével kapott további megoldások, összesen 10 különböző számhármas.

b) 2. Megoldás: Nagyon hasonló, becsülgetős megoldást adhatunk a **b)** feladatra anélkül, hogy 1 számlálójú törteket alakítanánk ki. a, b és c most is pozitív egészek. Ugyanúgy induljunk ki abból a megfigyelésből, hogy az egyenlet változatlan marad, akármelyik két betűt is cseréljük fel. Gyűjtsük össze azokat a megoldásokat, ahol $a \leq b \leq c$.

Nézzük meg a lehetséges értékeit:

1. eset: $a = 1$. Ekkor $bc = b + bc + c$, vagyis $b + c = 0$. Ennek nincs megoldása a pozitív egészek körében.

2. eset: $a \geq 3$. Ekkor $ab + bc + ca \leq \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3} = abc$. Mindhárom tagot külön-külön becsültük az alapján, hogy $3 \leq a \leq b \leq c$. Egyenlőség esetén a feladat egy megoldását kapjuk. Ennek szükséges feltétele, hogy $ab = \frac{abc}{3}$, azaz $c = 3$ legyen, és ekkor $a = b = c = 3$. Ez tehát az egyetlen megoldás, ha $a \geq 3$: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27$.

3. eset: $a = 2$. Behelyettesítve az egyenletbe: $2bc = 2b + bc + 2c$. Rendezzük át az egyenletet: $bc - 2b - 2c = 0$. A bal oldalt szorzattá tudjuk alakítani, ha mindkét oldalhoz hozzáadunk $2 \cdot 2 = 4$-et: $bc - 2b - 2c + 4 = 4$, ami egyenértékű azzal, hogy $(b - 2)(c - 2) = 4$.

   Mivel a a legkisebb, b is legalább 2, ezért $(b - 2) \geq 0$. Ugyanakkor $(b - 2) \leq (c - 2)$, tehát $(b - 2)$ a 4-nek egy 2-nél nem nagyobb pozitív osztója. Ez alapján $(b - 2)$ értéke 1 vagy 2 lehet, így két eset van:

   (a) eset: $b = 3$, ekkor $(c - 2) = 4$, tehát $c = 6$. Ez jó megoldás, mivel $2 \cdot 3 \cdot 6 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = 36$.

   (b) eset: $b = 4$, ekkor $(c - 2) = 2$, tehát $c = 4$. Ez is – mint láttuk – jó megoldás: $2 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 32$.

A 2. esetben csak 1, a 3/a) esetben 6, a 3/b) esetben pedig összesen 3 megoldás kapható a, b, c lehetséges értékeinek permutálásával.