XIV. DÜRER VERSENY

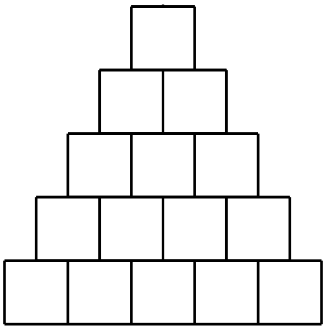
MATEMATIKA feladatok

Helyi forduló:
2020. november 20.

D kategória

9-12. osztályosok

1. Az ábrán látható négyzetekből álló piramis alsó sorának minden kis négyzetébe nullást vagy egyest írunk. Felfelé töltjük ki az üres négyzeteket úgy, hogy az adott üres négyzetbe a két alatta lévő négyzet számainak összege kerül. Hányféleképpen tölthetjük ki az alsó sort úgy, hogy a legfelső négyzetbe írt szám páros legyen?



2. Albrecht két hatos csoportba szeretné osztani az $1, 2, \ldots, 12$ számokat úgy, hogy minden csoportban legyen olyan szám, amely a maradék öt átlaga.
a) Sikerülhet-e ez Albrechtnek?
b) Mi a helyzet akkor, ha az $1, 2, \ldots,$ 18 számokat szeretné ilyen módon három egyenlő csoportba osztani?

3. Keressétek meg az összes olyan pozitív egészekből álló (a, b, c, d) számnégyest, melyre teljesül, hogy $a! + b! + c! = 3^d$.
Megjegyzés: Az $n!$ az első n pozitív egész szám szorzatát jelöli, azaz $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

4. Az ABC háromszögben az A csúcsnál 30°-os, B csúcsnál pedig 50°-os szög van. Mutassátok meg, hogy ha a beírt kör középpontját O jelöli, akkor $AC + OC = AB$ teljesül.

5. Egy egyetemről 9 professzor elutazott egy tudományos konferenciára. Azonban az előadások unalmasak voltak, ezért többször is elaludtak, de mindegyikük legfeljebb 4 alkalommal. Azt is tudjuk, hogy bármelyik két professzornál volt olyan pillanat, amikor mindketten aludtak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor volt olyan pillanat is, amikor egyszerre legalább hárman aludtak.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma.
Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető.
A feladatok megoldására és ***beküldésére*** *210 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:*

a XIV. Dürer Verseny szervezői