XIV. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA

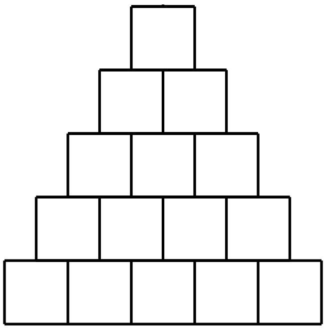
megoldások

Helyi forduló:
2020. november 20.

D kategória

9-12.
osztályosok

D1. Az ábrán látható négyzetekből álló piramis alsó sorának minden kis négyzetébe nullást vagy egyest írunk. Felfelé töltjük ki az üres négyzeteket úgy, hogy az adott üres négyzetbe a két alatta lévő négyzet számainak összege kerül. Hányféleképpen tölthetjük ki az alsó sort úgy, hogy a legfelső négyzetbe írt szám páros legyen?



Megoldás: Töltsük ki a piramis alsó sorának kis négyzeteit sorban az a, b, c, d, e változókkal, ahol mind az öt betű 0-t vagy 1-et takarhat. Ezután soronként felfelé haladva, írjuk be mindegyik kis négyzetbe az alatta lévő két kis négyzet számainak összegét (a feladat szerint). Például a középső sor jobb szélső kis négyzetébe a $(c+d)+(d+e)=c+2d+e$ kifejezést írjuk. Ha végigcsináljuk, látjhatjuk, hogy a legfelső négyzetbe $a+4b+6c+4d+e$ kerül. *Figyeljük meg, hogy a legfelső négyzetben lévő összegben mindegyik változó éppen annyiszor szerepel, ahányféleképpen a felső négyzetből az adott alsó négyzetig eljuthatunk úgy, hogy az út során mindig balra lefelé vagy jobbra lefelé lépünk egyet.*

Az $a+4b+6c+4d+e$ kifejezés akkor és csak akkor páros, ha $a+e$ páros, hiszen b, c és d páros együtthatókkal szerepelnek benne, ők nem befolyásolják az összeg paritását. Az $a+e$ összeg pedig pontosan akkor páros, ha a és e azonos paritásúak, vagyis mindkettő 0 vagy mindkettő 1.

Mivel a és e együtt kétféle értéket vehet fel, b-t, c-t és d-t pedig a többtől függetlenül két-kétféleképpen választhatjuk meg, összesen $2 \cdot 2^3 = 16$ megfelelő kitöltést kapunk.

D2. Albrecht két hatos csoportba szeretné osztani az $1, 2, \ldots, 12$ számokat úgy, hogy minden csoportban legyen olyan szám, amely a maradék öt átlaga.
a) Sikerülhet-e ez Albrechtnek?
b) Mi a helyzet akkor, ha az $1, 2, \ldots,$ 18 számokat szeretné ilyen módon három egyenlő csoportba osztani?

Megoldás: a) Egy lehetséges megoldás a következő: kerüljenek az első csoportba az 1, 2, 3, 5, 7 és 12 számok, a másodikba pedig a 4, 6, 8, 9, 10 és 11. Ekkor az 5, illetve a 8 megegyezik az adott csoportban lévő többi szám átlagával: $\left(\frac{1+2+3+7+12}{5} = 5\right.$ és $\left.\frac{4+6+9+10+11}{5} = 8\right)$.

b) Ha egy 6 egész számból álló a, b, c, d, e, f csoportban az egyik szám a maradék öt átlaga, például $f = \frac{a+b+c+d+e}{5}$, akkor $5f = a+b+c+d+e$, így $a+b+c+d+e+f = 6f$ páros. Tehát ha 1-től 18-ig az egész számok beoszthatók lennének három ilyen csoportba, akkor a számok összege mindegyikben páros lenne, vagyis az összes 18 szám összege is páros lenne. Azonban $1 + 2 + ... + 18 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 171$, ami páratlan. Ellentmondásra jutottunk, tehát a beosztás nem oldható meg.

D3. Keressétek meg az összes olyan pozitív egészekből álló (a, b, c, d) számnégyest, melyre teljesül, hogy $a!+b!+c! = 3^d$.
Megjegyzés: Az $n!$ az első n pozitív egész szám szorzatát jelöli, azaz $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Megoldás: Az egyenlet nem változik meg, ha az a, b és c változókat tetszőlegesen cserélgetjük (permutáljuk). Az egyszerűség kedvéért így feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$, hiszen ha ez nem teljesülne, cserékkel el tudjuk érni, hogy a három szám ilyen relációban álljon egymással.

Vizsgáljuk meg először az egyenletet paritás (azaz 2-vel való oszthatóság) szempontjából. 3^d mindenképp páratlan szám, hiszen $d > 0$, így $a! + b! + c!$-nak is páratlannak kell lennie. Ez kétféleképpen lehetséges: vagy $a!$, $b!$ és $c!$ is páratlan, így az összegük is, vagy közülük kettő páros és egy páratlan.

Vegyük előbb az első esetet. Ha a legalább 2, akkor $a!$ páros lesz, hiszen ha a faktoriális szorzatalakjában a tényezőket növekvő sorrendben írjuk, akkor a második szorzótényező a 2. Így ha $a!, b!$ és $c!$ is páratlan, akkor csak az $a = b = c = 1$ eset lehetséges. Ez pedig $d = 1$ választással egy helyes megoldást ad.

A továbbiakban már csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor $a!$, $b!$ és $c!$ közül egy páratlan, és kettő páros. Az előbb meggondoltak szerint ekkor a páratlan értéke mindenképp 1!. Mivel feltettük, hogy a, b és c közül c a legkisebb, így ebben az esetben $c = 1$, valamint $a \geq b \geq 2$.

Ezután vizsgáljuk az egyenletet 3-as maradék szempontjából is. 3^d természetesen osztható 3-mal, így a másik oldalnak is oszthatónak kell lennie vele. Ha b legalább 3, akkor $b!$ osztható 3-mal, hiszen a faktoriális szorzatalakjában szerepel a 3 mint szorzótényező. Ha $b!$ osztható 3-mal, akkor ezek szerint $a!$ is, hiszen feltettük, hogy $a \geq b$. Viszont most $c! = 1$, tehát $b \geq 3$ esetén a bal oldal nem lenne osztható 3-mal. Mivel oszthatónak kell lennie, így b kisebb kell, hogy legyen mint 3, azaz $b = 2$, hiszen $b!$ most páros a paritási feltétel miatt.

Itt tartunk tehát: $a!+2!+1! = 3^d$, azaz $a!+3 = 3^d$. Ebből már az is látszik, hogy $d \geq 2$. Rendezzük át az egyenletet a következőképpen: $a! = 3^d - 3$, azaz $a! = 3 \cdot (3^{d-1} - 1)$. $(3^{d-1} - 1)$ nem osztható 3-mal, mert d legalább 2, így $3 \cdot (3^{d-1} - 1)$ osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel. Emiatt $a!$ sem lehet osztható 9-cel. Ha a legalább 6, akkor $a!$ szorzótényezői közt szerepel a 3 és a 6 is, tehát $a!$ osztható lesz $3 \cdot 6$-tal, ezáltal pedig 9-cel is.

Így a csak $3, 4$ vagy 5 lehet. $a = 3$ helyes megoldást ad $d = 2$-vel, hiszen $3! + 2! + 1! = 9 = 3^2$. $a = 4$ helyes megoldást ad $d = 3$ választással, hiszen $4! + 2! + 1! = 27 = 3^3$. $a = 5$-höz pedig nincs pozitív egész d, amellyel az egyenlet igaz lenne, ugyanis $5! + 2! + 1! = 123 = 3 \cdot 41$, ami nem 3-hatvány.

Tehát az egyenlet megoldásai:
I. $a = b = c = d = 1$
II. $a = 3, b = 2, c = 1, d = 2$
III. $a = 4, b = 2, c = 1, d = 3$
Mivel csak a könnyebb esetszétválasztás kedvéért tettük fel, hogy $a \geq b \geq c$, ezért a II. és III. megoldásokban a, b és c értékeinek tetszőleges páronkénti cserélgetésével kapott számnégyesek is megoldásai az egyenletnek, vagyis ezekben az esetekben hat-hat megfelelő számnégyes létezik.

D4. Az ABC háromszögben az A csúcsnál $30°$-os, B csúcsnál pedig $50°$-os szög van. Mutassátok meg, hogy ha a beírt kör középpontját O jelöli, akkor $AC + OC = AB$ teljesül.

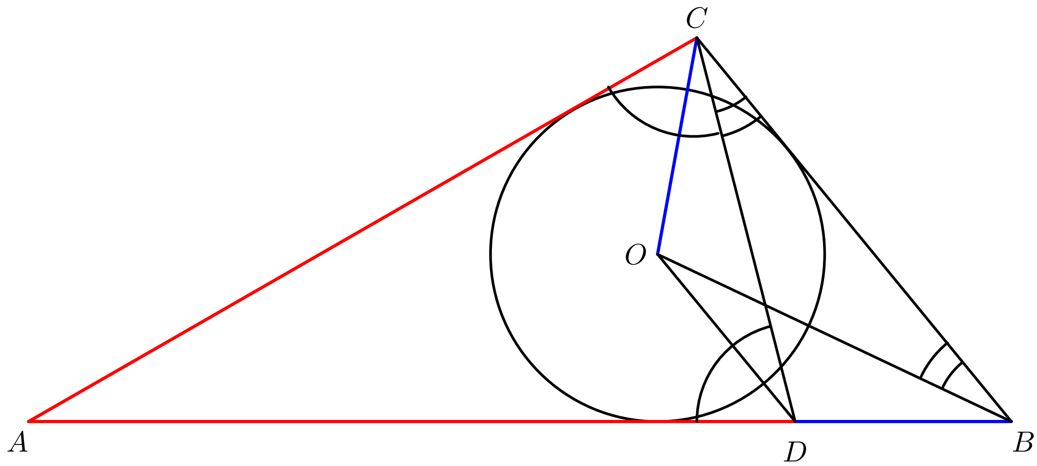
Megoldás: Az ABC háromszögben a $BCA\sphericalangle = 100°$. Tudjuk, hogy az OC egyenes az ABC háromszög C-nél levő belső szögfelezője, így $BCO\sphericalangle = 50°$. Legyen a BCO szög szögfelezőjének és az AB egyenesnek a metszéspontja D. Ekkor a BCO és a CBD háromszögek egybevágók, mert a BC oldaluk közös, és a szögeik megegyeznek. Ebből az egybevágóságból $OC = DB$ adódik.

Tudjuk, hogy $ADC\sphericalangle = 75°$, mivel a CDB háromszög külső szöge, valamint $DCA\sphericalangle = 75°$ szintén teljesül OC és DC szögfelezősége miatt. Így az ADC háromszög egyenlőszárú, tehát $AC = AD$.

Az előző észrevételeket összerakva:

$$|AB| = |AD| + |DB| = |AC| + |OC|$$

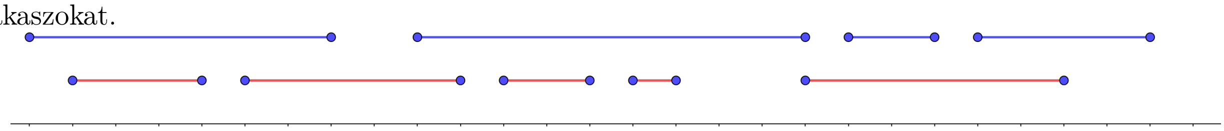
Éppen ezt akartuk igazolni.



D5. Egy egyetemről 9 professzor elutazott egy tudományos konferenciára. Azonban az előadások unalmasak voltak, ezért többször is elaludtak, de mindegyikük legfeljebb 4 alkalommal. Azt is tudjuk, hogy bármelyik két professzornál volt olyan pillanat, amikor mindketten aludtak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor volt olyan pillanat is, amikor egyszerre legalább hárman aludtak.

Megoldás: Indirekt módon bizonyítunk, azaz feltesszük, hogy bármely pillanatban legfeljebb kettő professzor aludt. Az egyes alvások időtartamait képzeljük el szakaszokként az időt jelölő számegyenesen: a szakasz kezdőpontja az az időpont, amikor az adott professzor elalszik, és a végpontja pedig az az időpont, amikor felébred. Ki fogjuk színezni a szakaszokat pirosra és kékre a kezdőpontok szerinti növekvő sorrendben. Az első szakasz legyen kék, ez után minden következő szakaszt a következő módon színezünk ki: ha a kezdőpontja eleme egy már kiszínezett szakasznak, akkor azzal ellentétes színűre színezzük az újat; ha nem, akkor tetszőlegesen színezzük ki. Mivel minden kezdőpont legfeljebb egy másik szakasznak pontja (azaz amikor egy professzor elalszik, legfeljebb egy másik aludhat), ezzel a módszerrel az összes szakasz kiszínezhető, és így csak ellentétes színű szakaszok metszik egymást. Az azonos színű szakaszok páronként diszjunktak, mert ha két azonos színű szakasz metszené egymást, akkor a később kezdődő kezdőpontjának a másik szakaszban kellene lennie, de úgy színeztünk, hogy ez ne fordulhasson elő.

Hogy az ábránk áttekinthetőbb legyen, a számegyenes fölött két külön sorban rajzoljuk meg a szakaszokat.



Legyen a piros szakaszok száma p, a kék szakaszok száma k. Nevezzük kék résnek a szomszédos kék szakaszok közötti intervallumokat, ekkor pontosan $k-1$ kék rés van. Vegyük észre, hogy egy piros szakasz pontosan 1-gyel több kék szakaszt metsz, mint ahány kék rést kitölt. Mivel a piros szakaszok páronként diszjunktak, minden kék rést legfeljebb egy piros szakasz tölthet ki. Így a metsző (piros szakasz, kék szakasz) párok száma legfeljebb $p+k-1$, hiszen minden piros szakaszhoz tartozik egy ilyen pár, és még összesen maximum $k-1$ többlet származik a kék réseken való átívelésekből. Két ember pontosan akkor alszik egyszerre, ha vannak metsző alvásszakaszaik. Vagyis legfeljebb $p+k-1$ darab professzorokból álló párhoz van olyan pillanat, amikor mind a ketten alszanak.

9 professzor van, és bármely két professzor aludt egyszerre, ez $9 \cdot 8/2 = 36$ párt jelent, hiszen az első professzor 9-féleképpen választható ki, a második már csak 8-féleképpen, de a sorrendjük nem számít, ezért 2-vel osztunk. Tehát $36 \leq p+k-1$. Viszont mind a 9 professzor legfeljebb 4-szer alszik, vagyis összesen maximum $4 \cdot 9 = 36$ alvásszakasz lehet. Azaz $p+k \leq 36$. Így $36 \leq p+k-1 \leq 36-1 = 35$, ami ellentmondás. Ezzel igazoltuk, hogy valamelyik pillanatban legalább hárman nem voltak ébren.