



سی ام آبان ماه، تهران،

برگزاری به صورت مجازی

سوال یکم- آلبرخت¹ با سرعتی ثابت با ماشین خود در یک پیست موتور سواری حرکت می کند. این سفر بسیار طولانی است بنابراین ماروین² که در صندلی کناری آلبرخت نشسته است، حوصله اش سر می رود و شروع به محاسبه ی سرعت ماشین می کند. او کمی بی دقت بود اما متوجه می شود که هنگام ظهر آن ها جای گاه شماره ی XY که X, Y رقم هستند را رد کرده اند، در ساعت $12:42$ جای گاه شماره ی YX و در ساعت 1 بعد از ظهر نیز به جای گاه شماره ی XOY رسیده اند. بر مبنای آن چه ماروین نتیجه گرفته است، سرعت ماشین چقدر بوده است؟

سوال دوم- بهترین بخش کیک مستطیلی $18cm \times 36cm$ مادر بزرگ شکلاتی است که دور تا دور مستطیل را پوشانده شده است. سه نوه ی مادر بزرگ می خواهند تا کیک را میان خودشان تقسیم کنند تا هریک مقدار یکسانی (از نظر مساحت) از کیک داشته باشند، و مقدار یکسانی (از نظر محیطی) از ناحیه ی خوش مزه داشته باشند.

یکم. آیا آن ها می توانند کیک را به سه قطعه ی محدب تقسیم کنند؟

دوم. دفعه ی بعدی، مادر بزرگ کیک می پزد و کل خانواده می خواستند آن را بچشند بنابراین آن ها مجبور بودند کیک را به شش قطعه ی محدب تقسیم کنند. آیا این امر ممکن است؟

سوم. خیلی زود شهرت این کیک به همه ی هم سایه ها هم می رسد، آیا می توان شکل را به دوازده قطعه ی محدب برید به طوری که شرایط فوق برقرار بمانند؟

سوال سوم- نقشه ی هم کف ساختمان موزه ی هنرهای معاصر یک چند ضلعی (نه لزوماً محدب) است و دیواره هایش بتنی هستند. نیروی حراستی که از موزه محافظت می کند دو محل مورد علاقه دارد (نقطه های A, B) زیرا، با ایستادن روی هریک از این دو نقطه، هر فرد می تواند کل موزه را ببیند. آیا با قرار گرفتن روی هر نقطه از پاره خط AB می توان کل موزه را دید؟

¹ Albrecht

² Marvin

سوال چهارم- همه ی سه تایی های (a, b, c) از عددهای طبیعی را طوری بیابید که:

$$\text{lcm}(a, b) + \text{lcm}(a, c) + \text{lcm}(b, c) = \text{lcm}(a, b, c) \text{ یکم.}$$

$$\text{lcm}(a, b) + \text{lcm}(a, c) + \text{lcm}(b, c) = \text{lcm}(a, b, c) + \text{gcd}(a, b, c) \text{ دوم.}$$

سوال پنجم- بیست و یک سارق حرفه ای در شهر جنگاوران زندگی می کنند، هریک از آن ها دارای تعدادی دشمن بین باقی سارقان هستند. در ابتدا، هر سارق دارای 240 گلوله است، و با هریک از دشمنان خود دونل می کند. هر سارق، گلوله های خود را به طریق زوج گون بین دشمنان خود توزیع می کند؛ یعنی، وی تعداد یک سانی از گلوله ها را برای هریک از دونل های خود هم راه می آورد، و از هریک از گلوله هایش تنها دریک دونل استفاده می کند. هنگامی که تعداد گلوله هایش بر تعداد دشمنانش قابل قسمت نباشد، وی باز هم تعداد یکسانی گلوله به دونل هایش می برد و این امکان وجود دارد که در نهایت تعدادی از گلوله ها برایش باقی بماند.

در شهر، شلیک ممنوع است، بنابراین در هر دونل، دو سارق حرفه ای تنها تعداد گلوله های خود را مقایسه می کنند، و برنده کسی است که گلوله های بیش تری هم راه داشته باشد. پس از دونل، کلانتر، گلوله های برنده را می گیرد و بازنده، به نشانه ی اعتراض، گلوله های خود را به هوا شلیک می کند. پس از این که همه ی دونل ها انجام گرفت، کلانتر حداکثر چند گلوله خواهد داشت؟

دشمنی رابطه ای دوطرفه است. اگر دو دشمن حین دونل دارای تعداد یک سانی از گلوله ها باشند، درین صورت کلانتر گلوله های سارقی را می گیرد که کلاه پهن تری دارد.

مثال: اگر یک سارق دارای 13 دشمن باشد، درین صورت 18 گلوله را برای هر دونل با خود به هم راه می برد، و 6 گلوله برایش باقی خواهد ماند.

لطفا راه حل خود را برای هر سوال، در برگه ای جداگانه بنویسید. مطمئن شوید که نام گروه خود را روی هر برگه ی راه حل نوشته اید.

هر پرسش 12 امتیاز دارد. زمان این آزمون نیز 180 دقیقه است.

موفق باشید!

برگزار کنندگان 14 امین مسابقه ی دیورر.