



E1. Albrecht állandó sebességgel vezet az autópályán kocsijával. Mivel nagyon hosszú az út, a kocsiban mellette ülő Marvin unalmában elhatározta, hogy meghatározza az autó sebességét. Noha kicsit figyelmetlen volt, azt megjegyezte, hogy délben az XY -os kilométerkő mellett haladtak el (itt X és Y számjegyek), míg 12 óra 42 perckor az YX -es, 13 órakor pedig az $X0Y$ -os kilométerkő mellett. Milyen következtetésre jutott Marvin, mekkora az autó sebessége?

1. Megoldás: Tudjuk, hogy $XY - YX$ kilométer megtételéhez 42 percre volt szüksége az autónak, és további 18 percre $X0Y - YX$ kilométer megtételéhez. Felhasználva, hogy tízes számrendszerben vagyunk, a kilométerköveken szereplő számokat a következőképpen írhatjuk fel: $XY = 10 \cdot X + Y$, $YX = 10 \cdot Y + X$ és $X0Y = 100 \cdot X + Y$.

Vagyis az első két megfigyelés között megtett út, $(10 \cdot Y + X) - (10 \cdot X + Y) = 9(Y - X)$ és a második és harmadik megfigyelés közt megtett út, $(100 \cdot X + Y) - (10 \cdot Y + X) = 99X - 9Y = 9(11X - Y)$ aránya egymáshoz ugyanaz, mint a 42 és a 18 aránya, ami $7 : 3$. Leoszthatunk 9-cel, vagyis $Y - X$ és $11X - Y$ aránya $7 : 3$. Mivel X és Y is számjegyek, ezért $Y - X$ nem lehet nagyobb, mint 9. Emiatt az egyetlen $7 : 3$ arányú számpár, ami szóba jöhet, a 7 és a 3. Tehát

$$Y - X = 7$$

$$11X - Y = 3$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy $10X = 10$, vagyis $X = 1$ és $Y = 8$. Ekkor az autó 42 perc alatt $81 - 18 = 63$ kilométert tett meg, vagyis sebessége 90 kilométer/óra.

2. Megoldás: Rövidebben célhoz érhetünk, ha észrevesszük, hogy az autó 12 és 13 óra között összesen $X0Y - XY = 90 \cdot X$ kilométert tett meg. Azonban X értéke csak 1 lehet, hiszen az első két kilométerkő között több idő telt el, mint a második és harmadik között, vagyis nagyobb a távolságuk. Ha ugyanis X legalább 2 lenne, akkor a második és harmadik távolsága legalább 100 km, míg az első és második távolsága legfeljebb 90 km lenne, ami nem lehetséges. Tehát az autó 12 és 13 óra között, 1 óra alatt 90 km-t tett meg, vagyis a sebessége 90 kilométer/óra.



E2. Nagyi $18\text{ cm} \times 36\text{ cm}$ -es téglalap alakú tortájának a szélén lévő csokimáz a legfinomabb része. Ezért három unokája úgy szeretne osztozkodni, hogy mindenkinek ugyanakkora (területű) torta jusson, de a széléből (kerületéből) is ugyanannyit kapjon mindenki.

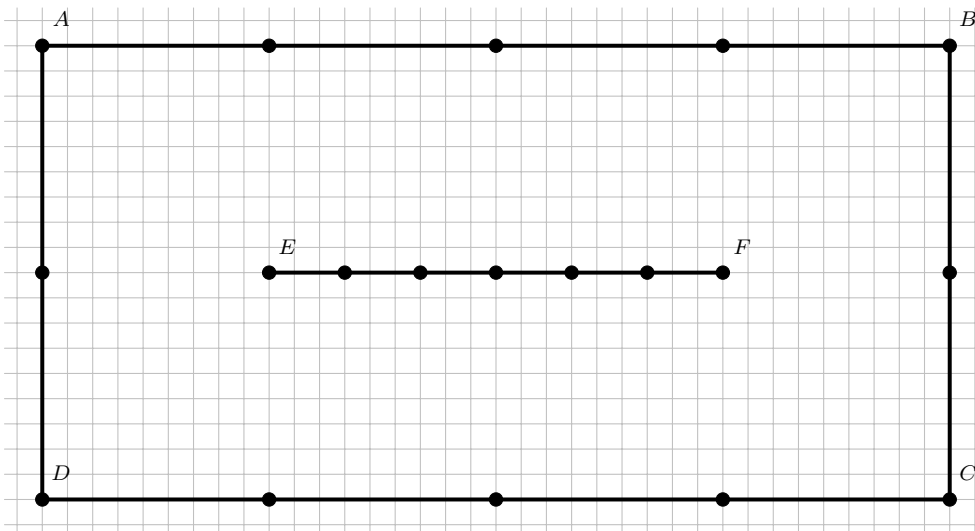
a) Fel tudják-e így vágni a tortát 3 konvex darabra?

b) Nagyi következő tortájából már az egész család szeretne enni, ezért 6 egyenlő területű és ugyanannyi csokimáz tartalmazó (konvex) szeletre kell felvágniuk. Ezt meg tudják tenni?

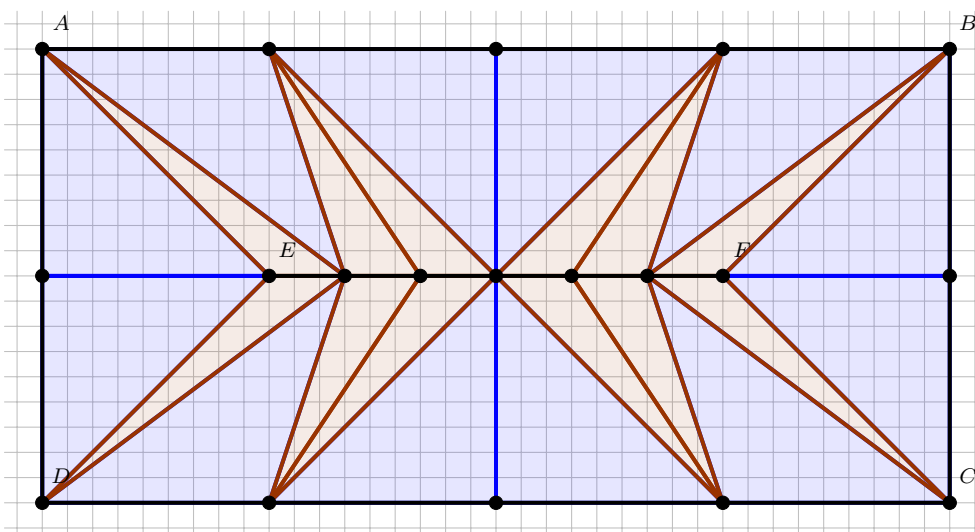
c) Hamarosan az egész szomszédságban elterjedt nagyi tortájának híre. Fel tudják szeletelni a tortát a fenti szabályok szerint, ha 12 ember szeretne belőle enni?

1. Megoldás: Először mutatunk a c) részre egy megoldást, amiből kaphatunk az a) -ra és a b) -re is egy-egy új megoldást.

Vegyük fel az E pontot úgy, hogy $6 - 6\text{ cm}$ -re legyen az AB , a CD és az AD oldalaktól. Hasonlóan az F pedig az AB , a CD és a BC oldalaktól legyen $6 - 6\text{ cm}$ -re. Osszuk fel továbbá a kerületet 12 egyenlő részre, az EF szakaszt pedig 6 egyenlő részre:



Most pedig alakítsunk ki háromszögeket:

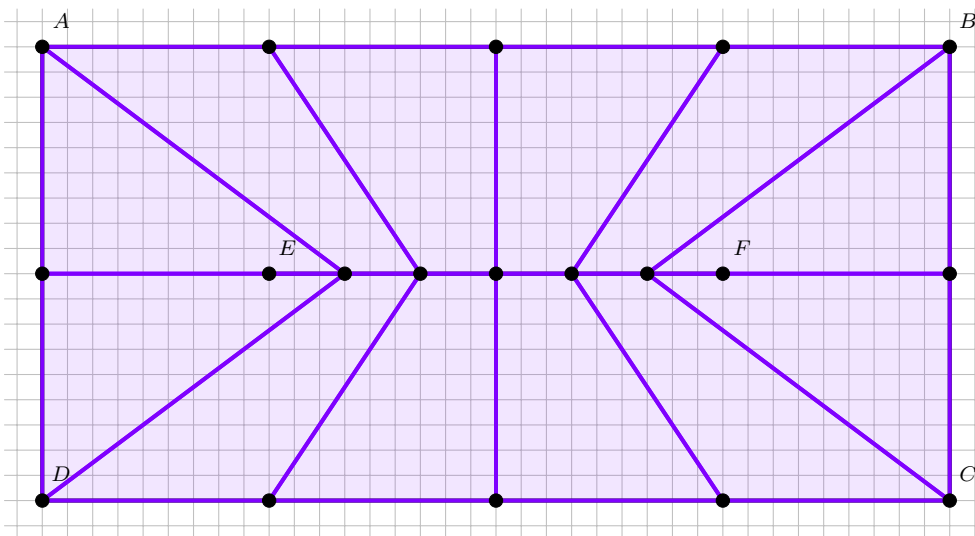


Az összes kék háromszögnek 9 cm az egyik oldala, ami ráadásul a torta széle. Az ehhez tartozó magasság pedig mindig 6 cm , mert így vettük fel az EF szakaszt. Vagyis a kék háromszögek területe megegyezik.

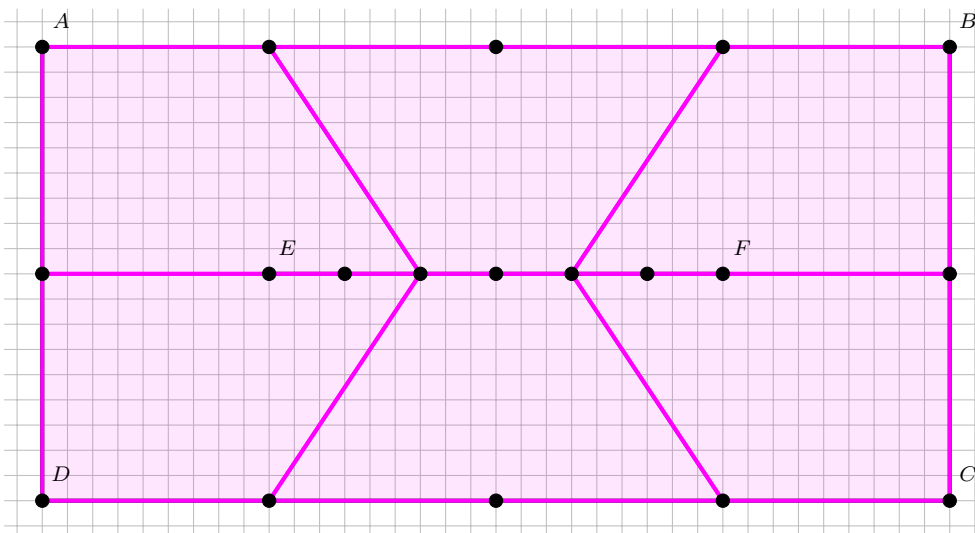


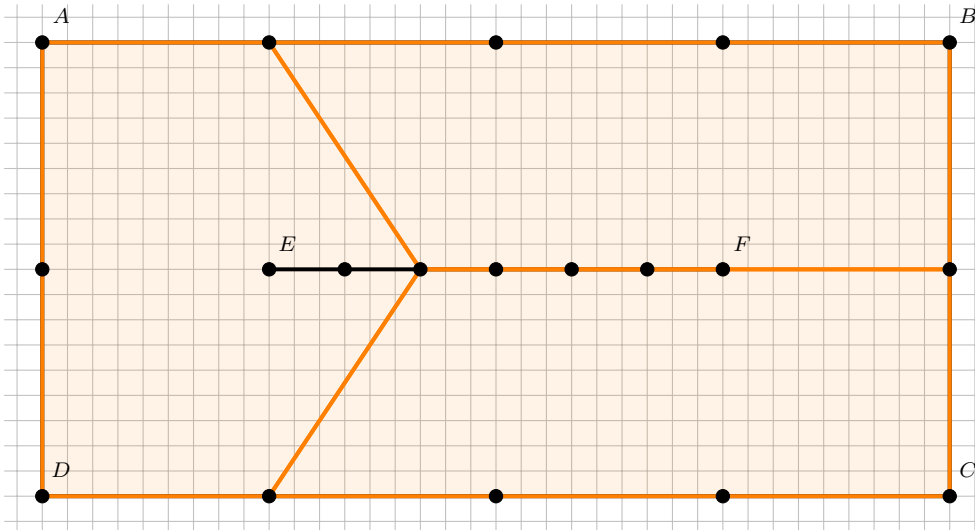
Az összes piros háromszögnek pedig szintén ugyanakkora az egyik oldala, mert az EF -et egyenlő részekre osztottuk, és mindnek 6 cm az ehhez tartozó magassága. Tehát a piros háromszögek területe is megegyezik.

Ha mindenki kap egy kéket meg egy pirosat, azzal tehát egyforma területű tortát kapnak, és a csokimázból is egyforma mennyiség jut:

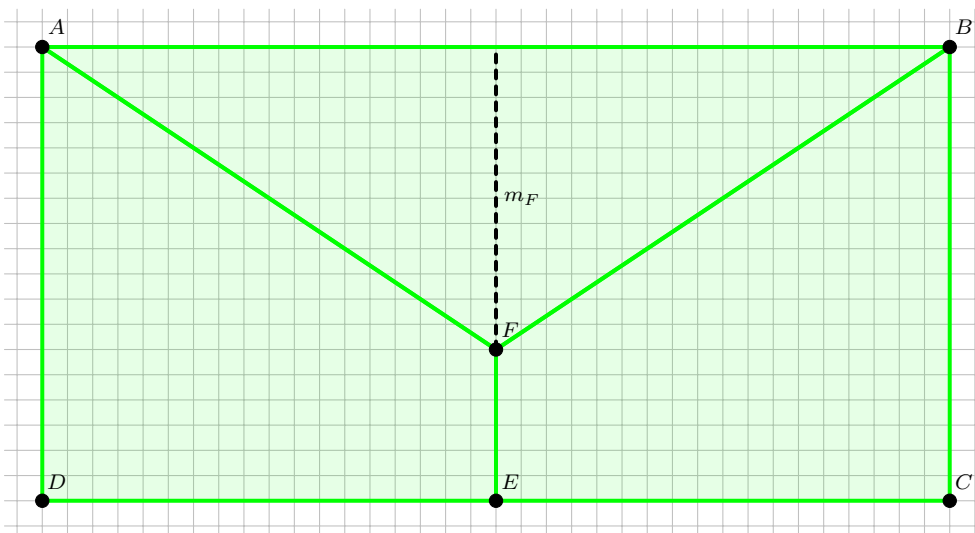


Ha pedig 2-2 kék és piros, illetve 4-4 kék és piros részt kapnak, akkor a b) , illetve a) részekre kapunk megoldást:



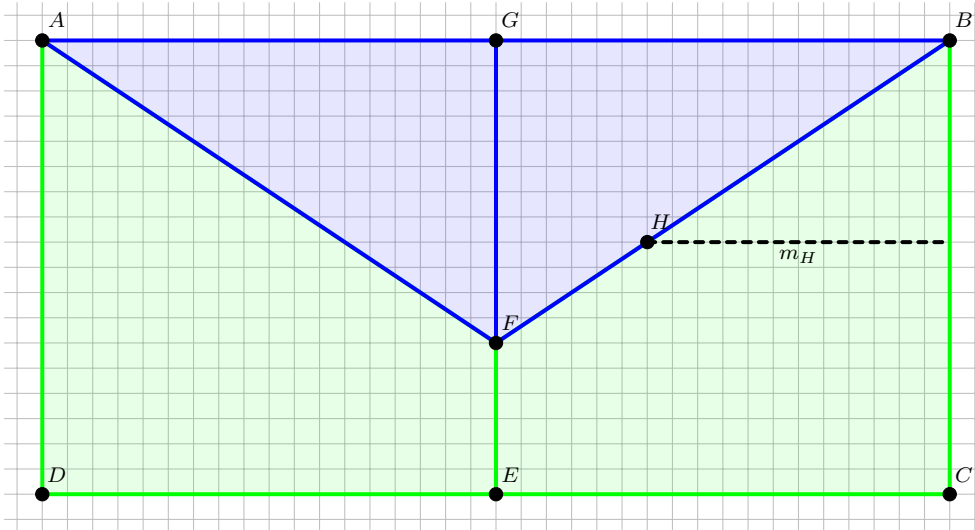


2. Megoldás: a) A kerület összesen $2(18+36) = 108$ cm hosszú, vagyis mindenkinek ennek a harmada kell, hogy jusson, azaz 36 cm, ami pont a hosszabbik oldal hossza. Jelöljük ki egy hosszabb oldal két csúcsát (A, B) és a velük szemben lévő oldal felezőpontját (E) – ezek épp három egyforma részre osztják a kerületet. Kerssünk hozzájuk egy F pontot a téglalap belsejében, mellyel összekötve a területet is 3 egyforma részre fogjuk vágni:



Hogy a két oldalsó terület egyforma legyen, a hosszabbik oldal felezőmerőlegesén keressük az F pontot. Mivel az ABF háromszög területe a harmada kell, hogy legyen a tortának, azaz $18 \cdot 36/3 = 216$ cm², és ismerjük az AB hosszát, így az ehhez tartozó magasságot meg tudjuk határozni: $m_F = \frac{2T_{ABF}}{AB} = \frac{2 \cdot 216}{36} = 12$ cm, másképp fogalmazva $EF = 18 - 12 = 6$ cm.

b) Ezután mindhárom részt el tudjuk felezni jól. Az ABF -nél könnyű a dolgunk, szimmetria miatt az FG felezni fogja mind a területet, mind a téglalap kerületét:

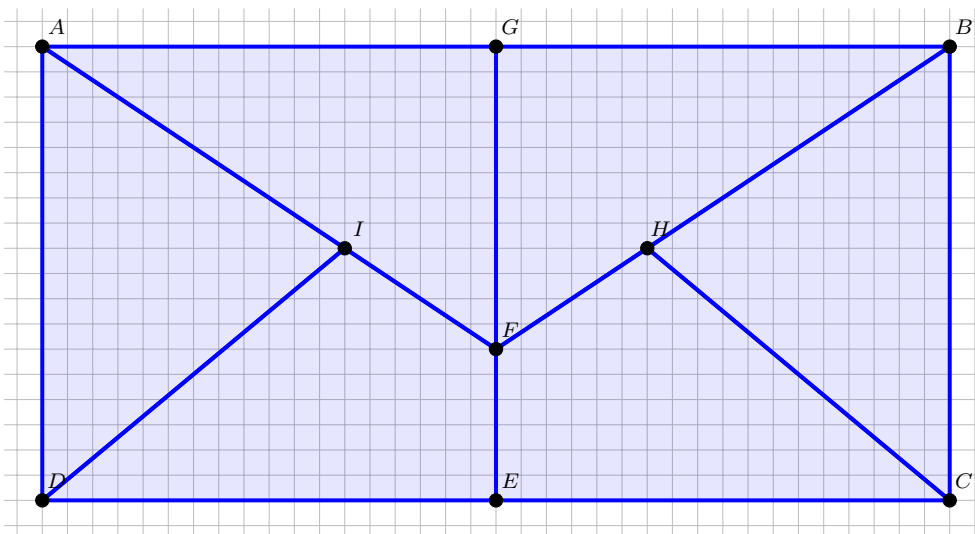


A $BCEF$ négyszög elfelezéséhez egyfelől a C -n keresztül kell vágni (hogy a csokimázból 18 – 18 cm jusson), már csak az a kérdés, hogy a BF szakaszon hol kell felvenni a H pontot, hogy a CH a területet is felelje.

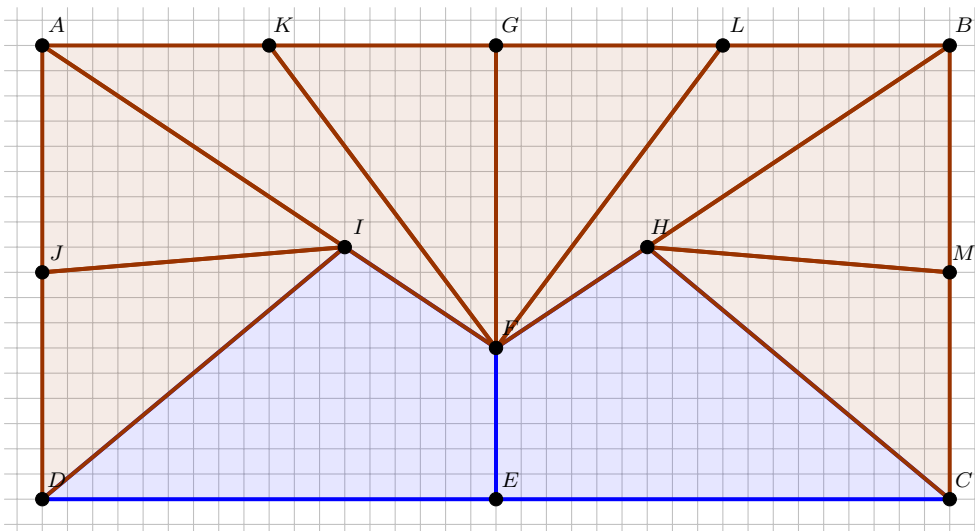
Ezt megint könnyen meg fogjuk tudni határozni, hiszen a HBC területe a téglalap hatoda kell (108 cm^2), hogy legyen, és a BC alapot ismerjük (18 cm), vagyis a hozzá tartozó magasságot ki tudjuk számolni: $m_H = \frac{2T_{HBC}}{BC} = \frac{2 \cdot 108}{18} = 12 \text{ cm}$.

Emiatt egyébként H épp az FB F -hez közelebbi harmadolópontja lesz, így azt is megkaphatjuk, hogy az AB oldaltól $\frac{2}{3}FG = 8 \text{ cm}$ -re van.

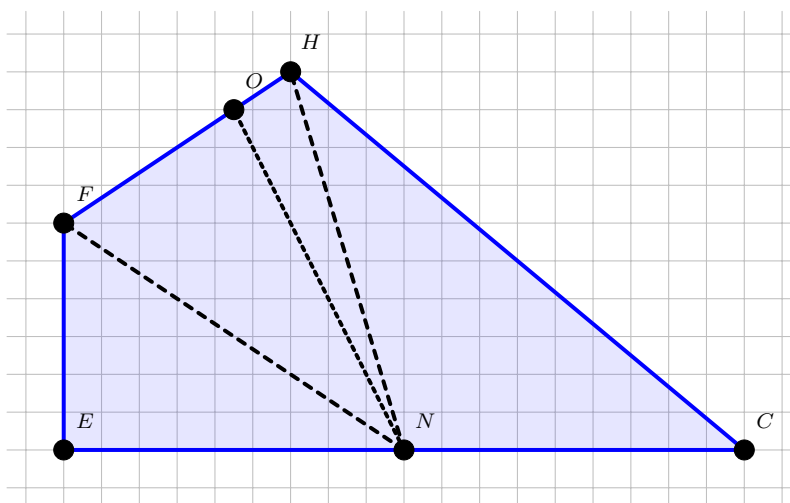
Szimmetrikusan, az $ADEF$ négyszöget a DI -vel tudjuk jól kettévágni:



c) Ismét ezeket a részeket fogjuk jól elfelezni. A DIA , AFG , GFB , BHC háromszögekkel könnyű dolgunk van. Ha behúzzuk az IJ , FK , FL , HM súlyvonalakat, az pont felezi a háromszögek területét, és a szemközti oldalakat (vagyis a csokimázt) is:



Foglalkozzunk már csak a $CEFH$ négyszöggel. Ha ezt megoldjuk, szimmetrikusan működni fog a $DEFI$ -re is. Legyen az EC felezőpontja N , és keressük azt a O pontot, amivel az NO épp felezni tudja a területet:



Az NEF és NHC háromszögek területét ki tudjuk számolni, és azt látjuk majd, hogy mindkettő kisebb, mint 54 cm^2 , és így az O pontnak valahol az FH szakaszon kell lennie – ahogy az ábrán látható.

$$T_{NEF} = \frac{NE \cdot EF}{2} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \text{ cm}^2.$$

NHC területének meghatározásához idézzük fel, hogy H 8 cm-re volt AB -től, ami azt jelenti, hogy 10 cm-re van EC -től. Vagyis $T_{NHC} = \frac{NC \cdot 10}{2} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45 \text{ cm}^2$.

Ez alapján az O pontot úgy kell választani, hogy $T_{OHN} = 54 - 45 = 9 \text{ cm}^2$, és $T_{OHF} = 54 - 27 = 27 \text{ cm}^2$ legyen. A két terület aránya éppen 1 : 3, vagyis ha O -t a FH H -hoz közelebbi negyedelőpontjának választjuk, akkor a két háromszögben az N -hez tartozó magasság ugyanakkora, a két alap meg épp 1 : 3 arányban van, tehát a területek is így fognak aránylani egymáshoz.

Megjegyzés: Igazából nem kell pontosan meghatározni, hogy hol van az O pont, az is elég, ha bebizonyítjuk, hogy létezik egy megfelelő pont.

Képzletben illesszük a késünket az NE félegyenesre, majd kezdjük el forgatni óramutató járásával megegyező irányba úgy, hogy végig az N -ben van az egyik vége. (Vagyis az ábrán lévő szakaszokon például NE , NF , NO , NH , NC sorrendben mennénk végig.)

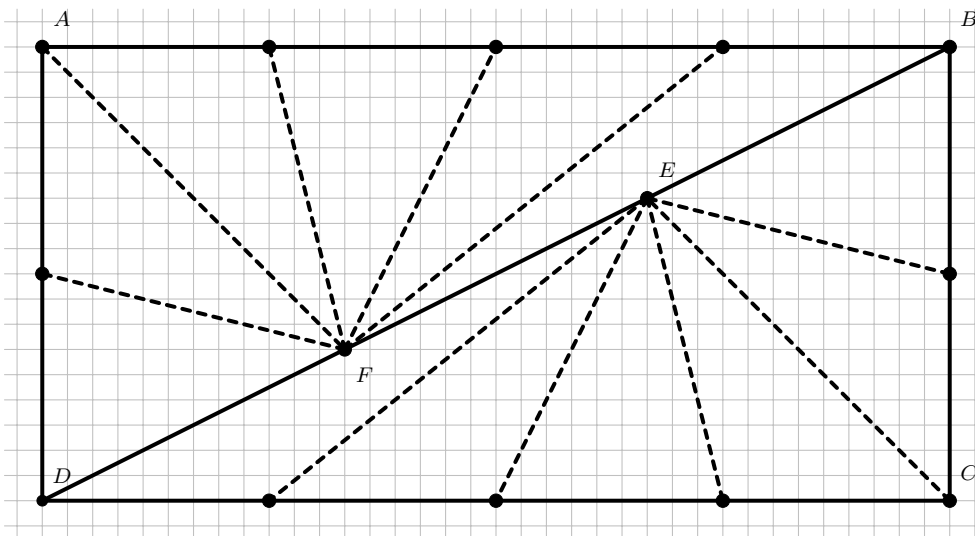


Ezzel kezdetben az egyik terület 0, a másik az egész (108 cm^2), és ahogy forgatjuk, folyamatosan nő az előbbi terület, és csökken a másik. A végén pedig épp az első terület lesz az egész, és a második 0. Mivel folytonosan változott a terület, valahol kellett lennie egy állásnak, amikor épp fele-fele arányban vágunk.

Ez a megoldás a folytonosság gondolatát használja, de mint láttuk, enélkül is kijön a feladat.

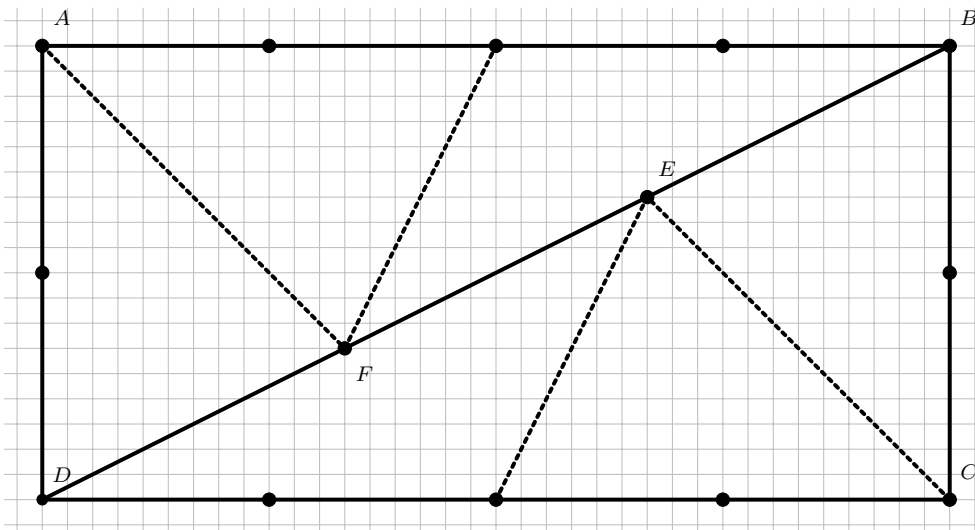
3. Megoldás: Megint a c) -re adunk először egy felosztást. Most vegyük fel az E és F pontot a BD átlón úgy, hogy egyforma távol legyenek a BC és CD , illetve DA és AB oldalaktól. Másképp fogalmazva az E a BCD szögfelezőjén, F a DAB szögfelezőjén lesz.

Megint osszuk fel 12 egyforma részre a kerületet, és a BD átló feletti osztópontokat kössük össze F -vel, az az alattiakat pedig E -vel:



Az így kapott háromszögeknek a téglalap határára eső oldala azonos hosszú (vagyis egyforma csokimázat kapnak), és az ehhez tartozó magasság is egyforma lesz, hiszen így vettük fel az E és F pontokat. Tehát ez egy jó felosztás.

Ha csak minden másodikat kötünk össze, akkor pedig a b) részre kapunk így egy újabb megoldást:



Érdekes meggondolni, hogy ezek ügyes összevonásával már nem kapunk megoldást az a) részre, mert az egyik alakzat mindig konkáv lesz.



E3. Egy kortárs művészeti múzeum alaprajza (nem feltétlenül konvex) sokszög, a falai tömör falak. A múzeumot őrző őrnök két kedvenc helye van (A és B pont), ugyanis mindkét helyről be tudja látni a múzeum teljes területét. Igaz-e, hogy ekkor AB szakasz tetszőleges pontjából is belátható az egész múzeum?

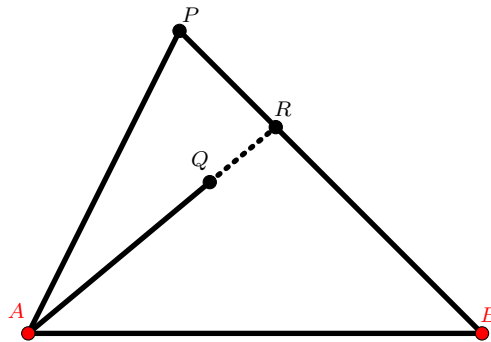
Megoldás:

Vegyük a múzeumnak egy tetszőleges P pontját. Azt fogjuk belátni, hogy az ABP háromszög belsejének és határának minden pontja a múzeum egy pontja.

Ha A (illetve B) pontból látható a múzeum egy X pontja, akkor a teljes AX (illetve BX) szakasz is a múzeum része, mert ha lenne egy Y pont az AX szakaszon, ami nem a múzeum része, akkor A pontból nem lenne belátható az X pont.

Ilyen módon a teljes AB , AP , BP szakasz (azaz az ABP háromszög határa) is a múzeum része.

Lássuk be, hogy ABP háromszögnek minden Q belső pontja a múzeum egy pontja. Az AQ egyenes és BP szakasz metszéspontja legyen R . Mivel R pont a múzeum egy pontja (az ABP háromszög határán van), ezért R látható A -ból, így a teljes AR szakasz is a múzeum része, tehát Q pont is a múzeum része.



Ezzel beláttuk, hogy az ABP háromszög minden belső és határpontja is a múzeum egy pontja. Ebből következik, hogy tetszőleges AB szakaszon lévő C pontból látható a P pont, hiszen CP szakasz a múzeum egy része.

Ez elmondható minden P pontra, ahol P pont a múzeum egy pontja, tehát az AB szakasz tetszőleges pontjából belátható az egész múzeum.



E4. Határozzuk meg az összes olyan a, b, c pozitív egészekből álló számhármast, amelyekre teljesül, hogy

a) $[a, b] + [a, c] + [b, c] = [a, b, c]$.

b) $[a, b] + [a, c] + [b, c] = [a, b, c] + (a, b, c)$.

Megjegyzés: Itt $[x, y]$ jelöli az x és y pozitív egészek legkisebb közös többszörösét, (x, y) pedig a legnagyobb közös osztójukat.

1. Megoldás: a) Vegyük észre, hogy ha p^k ($p, k \in \mathbb{Z}^+$) egy olyan prímhatalvány, amely osztja mindhárom számot, akkor p^k -nal osztva a számokat, továbbra is igaz marad az egyenlőség, mivel az összes tag pontosan p^k -adrészére csökken. Ha ezt megtesszük az eredeti $d = (a, b, c)$ legnagyobb közös osztó kanonikus alakjában szereplő mindegyik prímhatalvánnyal, akkor a kapott egyenletben $(a, b, c) = 1$ teljesülni fog. Emiatt az eredeti feladatnak akkor és csak akkor létezik megoldása, ha a leosztás után kapott egyenletnek is létezik megoldása. A továbbiakban csak az ilyen $((a, b, c) = 1)$ egyenletek megoldásait keressük.

Tekintsünk most egy p prímet, ami osztja a, b és c közül legalább az egyiket. Az egyenlet szimmetrikus, ezért a változók szerepe felcserélhető, és így feltehetjük, hogy p osztja a -t. Ekkor p osztja $[a, b]$ -t, $[a, c]$ -t és $[a, b, c]$ -t. Ebből következik, hogy osztani fogja $[b, c]$ -t is, vagyis a b és c közül az egyiket. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy b -t osztja. (Ha mindkettőt osztaná, akkor $(a, b, c) = 1$ nem lenne igaz.) Vagyis bármely prímtényező pontosan két változónak osztója.

Sőt, az is igaz, hogy a p prím a -ban és b -ben azonos hatványon szerepel. Ezt indirekten bizonyítjuk. Szerepeljen p az a -ban k -adik, b -ben l -edik hatványon, és legyen $k > l$. Ekkor p $[a, b]$ -ben, $[a, c]$ -ben és $[a, b, c]$ -ben is k -adik hatványon szerepel, vagyis $[b, c]$ -ben is k -adik hatványon kellene szerepelnie. Ez lehetetlen, mivel $p \nmid c$, és p a b változóban is kisebb, mint k -adik hatványon szerepel. Vagyis minden prímtényező pontosan két változó prímtényező felbontásában szerepel, méghozzá ugyanannyiadik hatványon.

Ha az $[a, b, c]$ -ben szereplő prímekeket csoportosítjuk aszerint, hogy melyik két-két változót osztják, fel tudjuk írni a számokat a következő alakban: $a = de$, $b = ef$, illetve $c = fd$, ahol d, e és f páronként relatív prím pozitív egészek. (Például e azon prímhatalványok szorzata, amelyek pontosan a -t és b -t osztják.) Ekkor $[a, b] + [a, c] + [b, c] = de + de + de = 3de$, és $[a, b, c] = def$. Ez viszont lehetetlen, mivel d, e és f pozitívak. Tehát nincsenek megfelelő a, b, c számok.

b) Vegyük észre, hogy ha egy p prímnek egy pozitív egész kitevőjű hatványa mindhárom változót osztja, akkor az **a)** részhez hasonlóan itt is le tudunk osztani vele, és igaz marad az egyenlőség (mind a legnagyobb közös osztóban, mind a legkisebb közös többszörösökben a definícióik szerint ugyanannyival csökken p kitevője). Ebből következően itt is eloszthatjuk mindhárom változót $d = (a, b, c)$ -vel, és ezek szintén megoldásai az osztással kapott egyenletnek.

Másrészt, ha az a, b, c számhármast megoldása az egyenletnek, akkor tetszőleges d pozitív egészszel szorozva őket, a kapott számhármast is megoldás (hiszen a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörösök a definíciójukból adódóan most d -szeresére nőnek.) E két megfigyelés alapján az egyenlet összes megoldása előáll az eredeti egyenlet olyan megoldásai többszöröseként, amelyekben $d = (a, b, c) = 1$. Keressük meg tehát az ilyen megoldásokat.

Vegyünk most egy p prímet, ami oszt legalább két számot a háromból. A szimmetria miatt itt is feltehetjük, hogy a -t és b -t osztja. Ekkor p osztani fogja mind a négy, az egyenletben szereplő legkisebb közös többszörös kifejezést, ami miatt $p \mid (a, b, c)$ is teljesül. Viszont $(a, b, c) = 1$ és $p > 2$, ezért ez nem lehetséges. Tehát bármely prím csak az egyik számot oszthatja, azaz a három szám páronként relatív prím egymáshoz. Ezzel az egyenlőség ilyen alakúvá válik: $ab + ac + bc = abc + 1$.

A szimmetria miatt most úgy osszuk ki a változók szerepeit, hogy $a \leq b \leq c$.

Bontsunk esetekre a lehetséges értékei szerint:

- Ha $a = 1$, akkor $b + c + bc = bc + 1$, vagyis $b + c = 1$, ami nem lehetséges.
- Ha $a \geq 3$, akkor $ab + ac + bc \leq \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3} < abc + 1$, ami szintén lehetetlen.



- Végezetül, ha $a = 2$, akkor $2b + 2c + bc = 2bc + 1$, ami átrendezve $bc - 2b - 2c + 1 = 0$, azaz $(b - 2)(c - 2) = 3$. Mivel b és c pozitív egészek, egyedül az $a = 2$, $b = 3$ és $c = 5$ lehet az egyenlet megoldása, ha $(a, b, c) = 1$, és ez valóban jó megoldás.

Ez alapján a megoldások pontosan azok az a, b, c számhármások, amelyekhez létezik olyan d pozitív egész, hogy $a = 2d$, $b = 3d$ és $c = 5d$. Behelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe, látjuk hogy valóban helyes megoldások: $6d + 10d + 15d = 30d + d$.

2. Megoldás: a) Tudjuk, hogy $[a, b] \mid [a, b, c]$, illetve ugyanígy $[b, c]$ és $[c, a]$ is osztja $[a, b, c]$ -t. Léteznek tehát olyan p, q, r pozitív egészek, hogy $[a, b, c] = p[a, b] = q[b, c] = r[c, a]$. Osszuk el a feladatbeli egyenletet $[a, b, c]$ ($\neq 0$)-val, így az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

egyenlethez jutunk.

Ennek az egyenletnek a pozitív egészek körében a $(2, 3, 6)$, a $(2, 4, 4)$ és a $(3, 3, 3)$ számhármások a megoldásai, az elemek tetszőleges permutációival.

Ezeket a megoldásokat például úgy találhatjuk meg, hogy a szimmetria miatt feltesszük, hogy $p \leq q \leq r$, és becsljük p -t. $p = 1$ nem lehet, mert a bal oldal nagyobb lenne 1-nél. $p > 3$ sem lehet, mivel ekkor a bal oldal legfeljebb $\frac{3}{4}$ lehetne. Ha $p = 3$, akkor a bal oldal csak úgy lehet 1, ha $p = q = r = 3$, ami megoldás. Végül, ha $p = 2$, akkor a megmaradó egyenlet: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$. A nevezők szorzatával visszabővítve, majd rendezve az egyenletet: $(q - 2)(r - 2) = 4$, amiből még két megoldást kapunk (p, q, r) -re: $(2, 3, 6)$ és $(2, 4, 4)$.

Megfigyelhetjük, hogy ha p, q és r nem páronként relatív prímekek, akkor az eredeti feladatnak nem létezik megoldása. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik olyan 1-nél nagyobb d prím, amely osztója például p -nek és q -nak is. Így egyrészt $d \mid \frac{[a, b, c]}{[a, b]}$ miatt d kitevője a c változó kanonikus alakjában nagyobb, mint a -éban, másrészt $d \mid \frac{[a, b, c]}{[b, c]}$ miatt d kitevője a -ban is nagyobb, mint c -ben. Ez a számelmélet alaptétele miatt ellentmondás.

Ha ezt a megfigyelést alkalmazzuk a kapott számhármásokra, kapjuk, hogy egyik sem adhat megoldást, mivel mindháromban találunk olyan számpárt, amelyeknek a 2 vagy a 3 közös osztója.

b) Induljunk el az **a)** részhez hasonlóan, és mivel $(a, b, c) \mid [a, b, c]$, létezik olyan s pozitív egész, amelyre $[a, b, c] = s(a, b, c)$. Azt is figyeljük meg, hogy (a, b, c) osztja a három változó páronkénti legkisebb közös többszörőseit is (például $(a, b, c) \mid a \mid [a, b]$), tehát p, q és r az s szám osztói (vagyis $[a, b, c] \mid s$). Vigyük át a legnagyobb közös osztót a bal oldalra, majd osszuk el itt is az egyenletet a nemnulla $[a, b, c]$ -vel, így a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = 1$$

Mivel az egyenlet továbbra is szimmetrikus a három változóra, feltehetjük, hogy $p \leq q \leq r$, és ugyanazzal a becslési módszerrel megoldhatjuk, mint az **a)** részben.

Ha $p = 1$, akkor a bal oldal 1-nél nagyobb lenne, mivel $\frac{1}{r} > 0$ és $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{s}$. Ha viszont $p \geq 3$, akkor a bal oldal 1-nél kisebb lenne: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} < 3 \cdot \frac{1}{3} + 0$. Tehát megoldás esetén $p = 2$, és a kapott egyenlet:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$$

Most p -hez hasonlóan becslhetjük q -t. Ha $q \leq 2$, akkor $\frac{1}{q} + (\frac{1}{r} - \frac{1}{s}) > \frac{1}{2} + 0$ lenne. Ha viszont $q \geq 4$, akkor a bal oldal lenne kisebb: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} < 2 \cdot \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}$. Tehát csak $q = 3$ lehetséges. Beírva az egyenletbe, ezt kapjuk:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{6}$$



Itt egyrészt $r \geq q = 3$, másrészt $r \leq 5$, mivel $r \geq 6$ esetén a bal oldal kisebb lenne $\frac{1}{6}$ -nál. Tehát $r \in \{3, 4, 5\}$, és ebből már s is meghatározható. r mindhárom lehetséges értéke olyan megoldást ad, ahol teljesül az $[a, b, c] \mid s$ feltétel is:

$$(p, q, r, s) \in (2; 3; 3; 6), (2; 3; 4; 12), (2; 3; 5; 30)$$

(A $(2; 3; 3; 6)$ itt értelemszerűen számnégyszeg jelöl, ezt a legnagyobb közös osztó jelölésétől a pontosvesszőkkel különböztettük meg.)

Az **a)** részben tett megfigyelés, miszerint p , q és r páronként relatív prímek kell, hogy legyenek, itt is ugyanúgy érvényes, ami alapján a $(2; 3; 3; 6)$ és a $(2; 3; 4; 12)$ számnégyszegek egyből kizárhatók. A $(2; 3; 5; 30)$ számnégyszeg szerint az szükséges, hogy

$$[a, b, c] = 2[a, b] = 3[b, c] = 5[c, a] = 30(a, b, c)$$

teljesüljön.

Ezek alapján c -ben a 2 kitevője éppen 1-gyel nagyobb hatványon szerepel, mint a és b közül abban, amelyikben nagyobb kitevőn szerepel. Emiatt $[a, b, c]$ -ben a 2 kitevője legalább 1-gyel nagyobb, mint (a, b, c) -ben. Hasonlóképpen, $[a, b, c]$ -ben a 3 és az 5 kitevője is legalább 1-gyel nagyobb, mint a három változó legnagyobb közös osztójában. (a, b, c) minden más prímtényezője is legfeljebb akkora hatványon szerepel benne, mint a legkisebb közös többszörösben, ezért $\frac{[a, b, c]}{(a, b, c)} \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Mivel itt éppen egyenlőségnek kell teljesülnie, ez csak úgy lehet, hogy a -ban és b -ben a 2 kitevője ugyanannyi, és c -ben a 2 kitevője éppen 1-gyel nagyobb ennél. Ugyanennek kell teljesülnie a 3 és az 5 kitevőjére is, persze azoknak rendre b -ben, illetve a -ban kell 1-gyel nagyobbak lenniük a többinél. Ezenkívül még az is szükséges, hogy $[a, b, c]$ összes, a 2-től, 3-tól és 5-től különböző prímtényezője ugyanakkora hatványon szerepeljen (a, b, c) -ben is. Ha d -vel jelöljük (a, b, c) -t, akkor ez pontosan azt jelenti, hogy $(a; b; c) = (5d; 3d; 2d)$, ahol tehát d egy pozitív egész.

Ezek a számhármások az eredeti egyenletnek valóban megoldásai:

$$[a, b] + [b, c] + [c, a] = (15 + 10 + 6)d = 31d = 30d + d = [a, b, c] + (a, b, c)$$

Nyilvánvalóan tetszőleges pozitív egész d -re, a változók tetszőleges permutálásával megoldást kapunk, és azt is láttuk, hogy nincs más megoldás.



E5. Warmridge városában 21 bandita él, mindegyiküknek van néhány ellensége a többiek közül. Kezdetben mindenkinek van 240 golyója, és minden ellenfelével párbajozik. Minden bandita szétosztja a golyóit egyenletesen az ellenfelei között, azaz minden párbajra ugyanannyi golyót visz, és egy golyót csak egy párbajba visz. Amennyiben a töltényei száma nem osztható az ellenfelei számával, akkor minden párbajra annyit visz, amennyit csak tud, de mindig ugyanannyit, így néhány töltény a végén megmaradhat nála.

A városban korábban betiltották a lövöldözést, ezért egy párbaj során csak összehasonlítják, hogy kinek van több töltény a fegyverében, ezután a seriff elkobozza a győztesnél lévő golyókat, a vesztes pedig tiltakozásul a levegőbe lövi az ő összes töltényét. Legfeljebb hány töltény lehet a seriffnél a leszámolás végén?

Az ellenségesség kölcsönös. Amennyiben ugyanannyi töltény van két párbajozó fegyverében, akkor a seriff attól kobozza el a golyókat, akinek szélesebb a kalapja.

Példa: ha egy banditának 13 ellensége van, akkor minden párbajra 18 golyót visz, és a végén marad nála 6 darab.

Megoldás: Ha egy főgonosz van, aki mindenki másnak az ellensége, míg a többiek mind barátságban állnak, akkor összesen 20 párbaj van. A seriff mindegyikben elviszi a győztes összes golyóját, tehát ebben az esetben $20 \cdot 240 = 4800$ töltényt gyűjthet össze a seriff.

Azt állítjuk, hogy ennél több golyó semmi esetben sem lehet a seriffnél a párbajok után. Vegyük azt a banditát, akinek a legtöbb ellensége van, ha több ilyen is van, akkor válasszuk ezek közül azt, akinek a legkeskenyebb a kalapja. Ez a bandita az összes párbaját elveszíti, így a 240 golyójából egy sem kerül a seriffhez. A többi banditának összesen $20 \cdot 240 = 4800$ tölténye van, így ennél több töltényt biztosan nem gyűjthet össze a seriff.

Megjegyzés: További kétféle megoldást olvashattok az E+ kategória 2. feladatának mintamegoldásában.