



problems

20 November 2020



سی ام آبان ماه، تهران،

برگزاری به صورت مجازی

سوال یکم- همه ی سه تایی های (a, b, c) از عددهای طبیعی را طوری بیابید که:

$$\text{lcm}(a, b) + \text{lcm}(a, c) + \text{lcm}(b, c) = \text{lcm}(a, b, c) \text{ یکم.}$$

$$\text{lcm}(a, b) + \text{lcm}(a, c) + \text{lcm}(b, c) = \text{lcm}(a, b, c) + \text{gcd}(a, b, c) \text{ دوم.}$$

سوال دوم- بیست و یک سارق حرفه ای در شهر جنگاوران زندگی می کنند، هریک از آن ها دارای تعدادی دشمن بین باقی سارقان هستند. در ابتدا، هر سارق دارای 240 گلوله است، و با هریک از دشمنان خود دوئل می کند. هر سارق، گلوله های خود را به طریق زوج گون بین دشمنان خود توزیع می کند؛ یعنی، وی تعداد یک سانی از گلوله ها را برای هریک از دوئل های خود هم راه می آورد، و از هریک از گلوله هایش تنها در یک دوئل استفاده می کند. هنگامی که تعداد گلوله هایش بر تعداد دشمنانش قابل قسمت نباشد، وی باز هم تعداد یکسانی گلوله به دوئل هایش می برد و این امکان وجود دارد که در نهایت تعدادی از گلوله ها برایش باقی بماند.

در شهر، شلیک ممنوع است، بنابراین در هر دوئل، دو سارق حرفه ای تنها تعداد گلوله های خود را مقایسه می کنند، و برنده کسی است که گلوله های بیش تری هم راه داشته باشد. پس از دوئل، کلانتر، گلوله های برنده را می گیرد و بازنده، به نشانه ی اعتراض، گلوله های خود را به هوا شلیک می کند. پس از این که همه ی دوئل ها انجام گرفت، کلانتر حداکثر چند گلوله خواهد داشت؟

دشمنی رابطه ای دوطرفه است. اگر دو دشمن حین دوئل دارای تعداد یک سانی از گلوله ها باشند، درین صورت کلانتر گلوله های سارقی را می گیرد که کلاه پهن تری دارد.

مثال: اگر یک سارق دارای 13 دشمن باشد، درین صورت 18 گلوله را برای هر دوئل با خود به هم راه می برد، و 6 گلوله برایش باقی خواهد ماند.

سوال سوم- اگر k_1, k_2 دو دایره باشد که در نقطه ی C برهم مماس خارجی هستند. نقطه های A روی k_1 و نقطه ی B روی k_2 طوری قرار گرفته اند که نقطه ی C روی پاره خط AB قرار گرفته است. هرگاه k_3 دایره ای باشد که از نقطه های A, B گذر کرده و دایره های k_1, k_2 را برای بار دوم به ترتیب در نقطه های M, N قطع می کند. هرگاه k_4 نیز دایره محیطی مثلث CMN باشد. نشان دهید مراکز چهار دایره ی k_1, k_2, k_3, k_4 روی یک دایره قرار دارند.

سوال چهارم- همه ی چند جمله ای های $P(x), Q(x)$ با ضریب های صحیح را طوری پیدا کنید که برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم:

$$P(x^2) + Q(x^2) = P(x)Q(x),$$

و چند جمله ای $P(x)$ از درجه ی n می باشد و چند جمله ای $Q(x)$ دارای n ریشه ی حقیقی و نامنفی باشد که ضرورتاً متمایز نیستند.

سوال پنجم- در فضای سه بعدی، n خط متمایز داریم که هیچ دوتایی موازی نیستند و هیچ سه تایی از یک نقطه ی مشترک گذر نمی کنند. این n خط، حداکثر چند صفحه را مشخص می کنند؟
گوییم یک صفحه مشخص شده است اگر دست کم شامل دو تا از خط ها باشد.

لطفا راه حل خود را برای هر سوال، در برگه ای جداگانه بنویسید. مطمئن شوید که نام گروه خود را روی هر برگه ی راه حل نوشته اید.

هر پرسش 12 امتیاز دارد. زمان این آزمون نیز 180 دقیقه است.

موفق باشید!

برگزار کنندگان 14 امین مسابقه ی دیورر.