XIV. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA feladatok

Helyi forduló:
2020. november 20.

E+ kategória

9-12. osztályosok

1. Határozzuk meg az összes olyan a, b, c pozitív egészekből álló számhármast, amelyekre teljesül, hogy
a) $[a, b] + [a, c] + [b, c] = [a, b, c]$.
b) $[a, b] + [a, c] + [b, c] = [a, b, c] + (a, b, c)$.
Megjegyzés: Itt $[x, y]$ jelöli az x és y pozitív egészek legkisebb közös többszörösét, (x, y) pedig a legnagyobb közös osztójukat.

2. Warmridge városában 21 bandita él, mindegyiküknek van néhány ellensége a többiek közül. Kezdetben mindenkinek van 240 golyója, és minden ellenfelével párbajozik. Minden bandita szétosztja a golyóit egyenletesen az ellenfelei között, azaz minden párbajra ugyanannyi golyót visz, és egy golyót csak egy párbajba visz. Amennyiben a töltényei száma nem osztható az ellenfelei számával, akkor minden párbajra annyit visz, amennyit csak tud, de mindig ugyanannyit, így néhány tölteny a végén megmaradhat nála.
A városban korábban betiltották a lövöldözést, ezért egy párbaj során csak összehasonlítják, hogy kinek van több töltény a fegyverében, ezután a seriff elkobozza a győztesnél lévő golyókat, a vesztes pedig tiltakozásul a levegőbe lövi az ő összes töltényét. Legfeljebb hány töltény lehet a seriffnél a leszámolás végén?
Az ellenségesség kölcsönös. Amennyiben ugyanannyi töltény van két párbajozó fegyverében, akkor a seriff attól kobozza el a golyókat, akinek szélesebb a kalapja.
Példa: ha egy banditának 13 ellensége van, akkor minden párbajra 18 golyót visz, és a végén marad nála 6 darab.

3. Legyen k_1 és k_2 két, egymást a C pontban kívülről érintő kör. Az A pont a k_1 körön helyezkedik el, a B pont pedig a k_2 körön úgy, hogy C az AB szakasz belső pontja. Legyen k_3 olyan kör, ami áthalad az A és B pontokon, illetve még egyszer elmetszi a k_1 és k_2 köröket rendre az M és N pontokban. Jelölje k_4 a CMN köréírt körét.
Igazoljátok, hogy a k_1, k_2, k_3, k_4 körök középpontjai egy körre illeszkednek.

4. Legyenek p és q egész együtthatós polinomok úgy, hogy a p polinom n-edfokú és n darab nemnegatív valós gyöke van (multiplicitással számolva). Ilyen feltételek mellett mely (p, q) polinomok elégítik ki a

$$p(x^2) + q(x^2) = p(x)q(x)$$

egyenletet?

5. Legfeljebb hány síkot határoz meg n különböző egyenes a térben, amelyek közül semelyik kettő sem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton?
Egy sík meg van határozva, ha tartalmaz legalább kettőt az egyenesek közül.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma.
Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető.
A feladatok megoldására és ***beküldésére*** *210 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:*

a XIV. Dürer Verseny szervezői