XIV. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA

megoldások

Helyi forduló:
2020. november 20.

E+ kategória

9-12. osztályosok

E+1. Határozzuk meg az összes olyan a, b, c pozitív egészekből álló számhármast, amelyekre teljesül, hogy
a) $[a, b] + [a, c] + [b, c] = [a, b, c]$.
b) $[a, b] + [a, c] + [b, c] = [a, b, c] + (a, b, c)$.
Megjegyzés: Itt $[x, y]$ jelöli az x és y pozitív egészek legkisebb közös többszörösét, (x, y) pedig a legnagyobb közös osztójukat.

1. Megoldás: a) Vegyük észre, hogy ha p^k ($p, k \in \mathbb{Z}^+$) egy olyan prímhatvány, amely osztja mindhárom számot, akkor p^k-nal osztva a számokat, továbbra is igaz marad az egyenlőség, mivel az összes tag pontosan p^k-adrészére csökken. Ha ezt megtesszük az eredeti $d = (a, b, c)$ legnagyobb közös osztó kanonikus alakjában szereplő mindegyik prímhatvánnyal, akkor a kapott egyenletben $(a, b, c) = 1$ teljesülni fog. Emiatt az eredeti feladatnak akkor és csak akkor létezik megoldása, ha a leosztás után kapott egyenletnek is létezik megoldása. A továbbiakban csak az ilyen $((a, b, c) = 1)$ egyenletek megoldásait keressük.

Tekintsünk most egy p prímet, ami osztja a, b és c közül legalább az egyiket. Az egyenlet szimmetrikus, ezért a változók szerepe felcserélhető, és így feltehetjük, hogy p osztja a-t. Ekkor p osztja $[a, b]$-t, $[a, c]$-t és $[a, b, c]$-t. Ebből következik, hogy osztani fogja $[b, c]$-t is, vagyis a b és c közül az egyiket. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy b-t osztja. (Ha mindkettőt osztaná, akkor $(a, b, c) = 1$ nem lenne igaz.) Vagyis bármely prímtényező pontosan két változónak osztója.

Sőt, az is igaz, hogy a p prím a-ban és b-ben azonos hatványon szerepel. Ezt indirekten bizonyítjuk. Szerepeljen p az a-ban k-adik, b-ben l-edik hatványon, és legyen $k > l$. Ekkor p $[a, b]$-ben, $[a, c]$-ben és $[a, b, c]$-ben is k-adik hatványon szerepel, vagyis $[b, c]$-ben is k-adik hatványon kellene szerepelnie. Ez lehetetlen, mivel $p \nmid c$, és p a b változóban is kisebb, mint k-adik hatványon szerepel. Vagyis minden prímtényező pontosan két változó prímtényezős felbontásában szerepel, méghozzá ugyanannyiadik hatványon.

Ha az $[a, b, c]$-ben szereplő prímeket csoportosítjuk aszerint, hogy melyik két-két változót osztják, fel tudjuk írni a számokat a következő alakban: $a = de$, $b = ef$, illetve $c = fd$, ahol d, e és f páronként relatív prím pozitív egészek. (Például e azon prímhatványok szorzata, amelyek pontosan a-t és b-t osztják.) Ekkor $[a, b] + [a, c] + [b, c] = def + def + def = 3def$, és $[a, b, c] = def$. Ez viszont lehetetlen, mivel d, e és f pozitívak. Tehát nincsenek megfelelő a, b, c számok.

b) Vegyük észre, hogy ha egy p prímnek egy pozitív egész kitevőjű hatványa mindhárom változót osztja, akkor az **a)** részhez hasonlóan itt is le tudunk osztani vele, és igaz marad az egyenlőség (mind a legnagyobb közös osztóban, mind a legkisebb közös többszörösökben a definícióik szerint ugyanannyival csökken p kitevője). Ebből következően itt is eloszthatjuk mindhárom változót $d = (a, b, c)$-vel, és ezek szintén megoldásai az osztással kapott egyenletnek.

Másrészt, ha az a, b, c számhármas megoldása az egyenletnek, akkor tetszőleges d pozitív egésszel szorozva őket, a kapott számhármas is megoldás (hiszen a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörösök a definíciójukból adódóan most d-szeresére nőnek.) E két megfigyelés alapján az egyenlet összes megoldása előáll az eredeti egyenlet olyan megoldásai többszöröseként, amelyekben $d = (a, b, c) = 1$. Keressük meg tehát az ilyen megoldásokat.

Vegyünk most egy p prímet, ami oszt legalább két számot a háromból. A szimmetria miatt itt is feltehetjük, hogy a-t és b-t osztja. Ekkor p osztani fogja mind a négy, az egyenletben szereplő legkisebb közös többszörös kifejezést, ami miatt $p \mid (a, b, c)$ is teljesül. Viszont $(a, b, c) = 1$ és $p > 2$, ezért ez nem lehetséges. Tehát bármely prím csak az egyik számot oszthatja, azaz a három szám páronként relatív prím egymáshoz. Ezzel az egyenlőség ilyen alakúvá válik: $ab + ac + bc = abc + 1$.

A szimmetria miatt most úgy osszuk ki a változók szerepeit, hogy $a \leq b \leq c$.

Bontsunk esetekre a lehetséges értékei szerint:

- Ha $a = 1$, akkor $b + c + bc = bc + 1$, vagyis $b + c = 1$, ami nem lehetséges.
- Ha $a \geq 3$, akkor $ab + ac + bc \leq \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3} < abc + 1$, ami szintén lehetetlen.

- Végezetül, ha $a = 2$, akkor $2b + 2c + bc = 2bc + 1$, ami átrendezve $bc - 2b - 2c + 1 = 0$, azaz $(b-2)(c-2) = 3$. Mivel b és c pozitív egészek, egyedül az $a = 2$, $b = 3$ és $c = 5$ lehet az egyenlet megoldása, ha $(a, b, c) = 1$, és ez valóban jó megoldás.

Ez alapján a megoldások pontosan azok az a, b, c számhármasok, amelyekhez létezik olyan d pozitív egész, hogy $a = 2d$, $b = 3d$ és $c = 5d$. Behelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe, látjuk hogy valóban helyes megoldások: $6d + 10d + 15d = 30d + d$.

2. Megoldás: a) Tudjuk, hogy $[a, b] \mid [a, b, c]$, illetve ugyanígy $[b, c]$ és $[c, a]$ is osztja $[a, b, c]$-t. Léteznek tehát olyan p, q, r pozitív egészek, hogy $[a, b, c] = p[a, b] = q[b, c] = r[c, a]$. Osszuk el a feladatbeli egyenletet $[a, b, c]$ $(\neq 0)$-val, így az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

egyenlethez jutunk.

Ennek az egyenletnek a pozitív egészek körében a $(2, 3, 6)$, a $(2, 4, 4)$ és a $(3, 3, 3)$ számhármasok a megoldásai, az elemek tetszőleges permutációival.

Ezeket a megoldásokat például úgy találhatjuk meg, hogy a szimmetria miatt feltesszük, hogy $p \leq q \leq r$, és becsüljük p-t. $p = 1$ nem lehet, mert a bal oldal nagyobb lenne 1-nél. $p > 3$ sem lehet, mivel ekkor a bal oldal legfeljebb $\frac{3}{4}$ lehetne. Ha $p = 3$, akkor a bal oldal csak úgy lehet 1, ha $p = q = r = 3$, ami megoldás. Végül, ha $p = 2$, akkor a megmaradó egyenlet: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$. A nevezők szorzatával visszabővítve, majd rendezve az egyenletet: $(q-2)(r-2) = 4$, amiből még két megoldást kapunk (p, q, r)-re: $(2, 3, 6)$ és $(2, 4, 4)$.

Megfigyelhetjük, hogy ha p, q és r nem páronként relatív prímek, akkor az eredeti feladatnak nem létezhet megoldása. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik olyan 1-nél nagyobb d prím, amely osztója például p-nek és q-nak is. Így egyrészt $d \mid \frac{[a,b,c]}{[a,b]}$ miatt d kitevője a c változó kanonikus alakjában nagyobb, mint a-éban, másrészt $d \mid \frac{[a,b,c]}{[b,c]}$ miatt d kitevője a-ban is nagyobb, mint c-ben. Ez a számelmélet alaptétele miatt ellentmondás.

Ha ezt a megfigyelést alkalmazzuk a kapott számhármasokra, kapjuk, hogy egyik sem adhat megoldást, mivel mindháromban találunk olyan számpárt, amelyeknek a 2 vagy a 3 közös osztója.

b) Induljunk el az **a)** részhez hasonlóan, és mivel $(a, b, c) \mid [a, b, c]$, létezik olyan s pozitív egész, amelyre $[a, b, c] = s(a, b, c)$. Azt is figyeljük meg, hogy (a, b, c) osztja a három változó páronkénti legkisebb közös többszöröseit is (például $(a, b, c) \mid a \mid [a, b]$), tehát p, q és r az s szám osztói (vagyis $[a, b, c] \mid s$). Vigyük át a legnagyobb közös osztót a bal oldalra, majd osszuk el itt is az egyenletet a nemnulla $[a, b, c]$-vel, így a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = 1$$

Mivel az egyenlet továbbra is szimmetrikus a három változóra, feltehetjük, hogy $p \leq q \leq r$, és ugyanazzal a becsléses módszerrel megoldhatjuk, mint az **a)** részben.

Ha $p = 1$, akkor a bal oldal 1-nél nagyobb lenne, mivel $\frac{1}{r} > 0$ és $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{s}$. Ha viszont $p \geq 3$, akkor a bal oldal 1-nél kisebb lenne: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} < 3 \cdot \frac{1}{3} + 0$. Tehát megoldás esetén $p = 2$, és a kapott egyenlet:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$$

Most p-hez hasonlóan becsülhetjük q-t. Ha $q \leq 2$, akkor $\frac{1}{q} + (\frac{1}{r} - \frac{1}{s}) > \frac{1}{2} + 0$ lenne. Ha viszont $q \geq 4$, akkor a bal oldal lenne kisebb: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} < 2 \cdot \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}$. Tehát csak $q = 3$ lehetséges. Beírva az egyenletbe, ezt kapjuk:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{6}$$

Itt egyrészt $r \geq q = 3$, másrészt $r \leq 5$, mivel $r \geq 6$ esetén a bal oldal kisebb lenne $\frac{1}{6}$-nál. Tehát $r \in \{3, 4, 5\}$, és ebből már s is meghatározható. r mindhárom lehetséges értéke olyan megoldást ad, ahol teljesül az $[a, b, c] \mid s$ feltétel is:

$$(p, q, r, s) \in (2; 3; 3; 6), (2; 3; 4; 12), (2; 3; 5; 30)$$

(A $(2; 3; 3; 6)$ itt értelemszerűen számnégyest jelöl, ezt a legnagyobb közös osztó jelölésétől a pontosvesszőkkel különböztettük meg.)

Az **a)** részben tett megfigyelés, miszerint p, q és r páronként relatív prímek kell, hogy legyenek, itt is ugyanúgy érvényes, ami alapján a $(2; 3; 3; 6)$ és a $(2; 3; 4; 12)$ számnégyesek egyből kizárhatók. A $(2; 3; 5; 30)$ számnégyes szerint az szükséges, hogy

$$[a, b, c] = 2[a, b] = 3[b, c] = 5[c, a] = 30(a, b, c)$$

teljesüljön.

Ezek alapján c-ben a 2 kitevője éppen 1-gyel nagyobb hatványon szerepel, mint a és b közül abban, amelyikben nagyobb kitevőn szerepel. Emiatt $[a, b, c]$-ben a 2 kitevője legalább 1-gyel nagyobb, mint (a, b, c)-ben. Hasonlóképpen, $[a, b, c]$-ben a 3 és az 5 kitevője is legalább 1-gyel nagyobb, mint a három változó legnagyobb közös osztójában. (a, b, c) minden más prímtényezője is legfeljebb akkora hatványon szerepel benne, mint a legkisebb közös többszörösben, ezért $\frac{[a,b,c]}{(a,b,c)} \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Mivel itt éppen egyenlőségnek kell teljesülnie, ez csak úgy lehet, hogy a-ban és b-ben a 2 kitevője ugyanannyi, és c-ben a 2 kitevője éppen 1-gyel nagyobb ennél. Ugyanennek kell teljesülnie a 3 és az 5 kitevőjére is, persze azoknak rendre b-ben, illetve a-ban kell 1-gyel nagyobbnak lenniük a többinél. Ezenkívül még az is szükséges, hogy $[a, b, c]$ összes, a 2-től, 3-tól és 5-től különböző prímtényezője ugyanakkora hatványon szerepeljen (a, b, c)-ben is. Ha d-vel jelöljük (a, b, c)-t, akkor ez pontosan azt jelenti, hogy $(a; b; c) = (5d; 3d; 2d)$, ahol tehát d egy pozitív egész.

Ezek a számhármasok az eredeti egyenletnek valóban megoldásai:

$$[a, b] + [b, c] + [c, a] = (15 + 10 + 6)d = 31d = 30d + d = [a, b, c] + (a, b, c)$$

Nyilvánvalóan tetszőleges pozitív egész d-re, a változók tetszőleges permutálásával megoldást kapunk, és azt is láttuk, hogy nincs más megoldás.

E+2. Warmridge városában 21 bandita él, mindegyiküknek van néhány ellensége a többiek közül. Kezdetben mindenkinek van 240 golyója, és minden ellenfelével párbajozik. Minden bandita szétosztja a golyóit egyenletesen az ellenfelei között, azaz minden párbajra ugyanannyi golyót visz, és egy golyót csak egy párbajba visz. Amennyiben a töltényei száma nem osztható az ellenfelei számával, akkor minden párbajra annyit visz, amennyit csak tud, de mindig ugyanannyit, így néhány töltény a végén megmaradhat nála.
A városban korábban betiltották a lövöldözést, ezért egy párbaj során csak összehasonlítják, hogy kinek van több töltény a fegyverében, ezután a seriff elkobozza a győztesnél lévő golyókat, a vesztes pedig tiltakozásul a levegőbe lövi az ő összes töltényét. Legfeljebb hány töltény lehet a seriffnél a leszámolás végén?
Az ellenségesség kölcsönös. Amennyiben ugyanannyi töltény van két párbajozó fegyverében, akkor a seriff attól kobozza el a golyókat, akinek szélesebb a kalapja.
Példa: ha egy banditának 13 ellensége van, akkor minden párbajra 18 golyót visz, és a végén marad nála 6 darab.

1. Megoldás: Ha egy főgonosz van, aki mindenki másnak az ellensége, míg a többiek mind barátságban állnak, akkor összesen 20 párbaj van. A seriff mindegyikben elviszi a győztes összes golyóját, tehát ebben az esetben $20 \cdot 240 = 4800$ töltényt gyűjthet össze a seriff.

Azt állítjuk, hogy ennél több golyó semmi esetben sem lehet a seriffnél a párbajok után. Vegyük azt a banditát, akinek a legtöbb ellensége van, ha több ilyen is van, akkor válasszuk ezek közül azt, akinek a legkeskenyebb a kalapja. Ez a bandita az összes párbaját elveszíti, így a 240 golyójából egy sem kerül a seriffhez. A többi banditának összesen $20 \cdot 240 = 4800$ tölténye van, így ennél több töltényt biztosan nem gyűjthet össze a seriff.

2. Megoldás: Az alsó becslés az előző megoldáshoz hasonlóan $20 \cdot 240$.

Fogalmazzuk át gráfelméletre a feladatot. Legyenek a G gráf csúcsai a banditák, és két bandita pontosan akkor legyen éllel összekötve, ha ellenségek. Minden V bandita legfeljebb $\frac{240}{d_V}$ golyót visz egy párbajba, ahol d_V az ellenségeinek a száma, ami gráfelméleti nyelvre átfogalmazva a V banditához tartozó csúcs fokszáma. Az uv élen a seriff legfeljebb $\max\left(\frac{240}{d_v}, \frac{240}{d_u}\right)$ golyót koboz el, így a bizonyítandó állítás a következő:

$$\sum \max\left(\frac{240}{d_v}, \frac{240}{d_u}\right) \leq 20 \cdot 240$$

ahol az összeadás az összes élen fut végig.

Osszuk le 240-nel a fenti állítást, és általánosítsuk tetszőleges $G = (V, E)$ gráfra a bizonyítandót:

$$\sum_{uv \in E} \max\left(\frac{1}{d_v}, \frac{1}{d_u}\right) \leq |V| - 1$$

Ezt az általánosított állítást fogjuk igazolni. Világos, hogy elég összefüggő gráfok esetén igazolni az állítást.

Jelölje Δ a maximális fokszámot G-ben. Világos, hogy $\Delta \leq |E|$, és $\max\left(\frac{1}{d_v}, \frac{1}{d_u}\right) \leq \frac{1}{d_u} + \frac{1}{d_v} - \frac{1}{\Delta}$, így

$$\sum_{uv \in E} \max\left(\frac{1}{d_v}, \frac{1}{d_u}\right) \leq \sum_{uv \in E} \left(\frac{1}{d_u} + \frac{1}{d_v} - \frac{1}{\Delta}\right) = |V| - \frac{|E|}{\Delta} \leq |V| - 1$$

Ebben a középső egyenlőség azért teljesül, mert minden u csúcs definíció szerint pont d_u darab élnek az egyik végpontja, így d_u-szor fog szerepelni az összeadásban az $\frac{1}{d_u}$.

A becslésből az is látszik, hogy csak $|E| = \Delta$ esetén lehet egyenlőség, azaz csak csillaggráf (egy csúcs mindegyik másikkal össze van kötve, és több éle nincs a gráfnak) esetén, és világos, hogy ekkor tényleg egyenlőség van.

3. Megoldás (vázlat): Csak az előző megoldásban megadott általánosabb, gráfos egyenlőtlenségre adunk új bizonyítást. Megint feltesszük, hogy összefüggő a gráf.

Legyen a G gráf egy tetszőleges csúcsa u, d_u ennek a csúcsnak a foka és e egy olyan él, amelynek u az egyik végpontja. Vegyünk véletlenszerűen egy feszítőfát, mindet egyenlő valószínűséggel. Ekkor

annak a valószínűsége, hogy e benne van a véletlen feszítőfában, legalább $\frac{1}{d_u}$. Ez egy szép állítás, ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk. Emiatt minden uv él legalább $\max\left(\frac{1}{d_v}, \frac{1}{d_u}\right)$ valószínűséggel a véletlen feszítőfában van.

Jelölje $\mathbb{I}_{uv}$ annak az eseménynek az indikátorát, hogy az uv él a feszítőfában van, azaz 1 ha benne van, és 0 ha nincs. Ennek a várható értéke megegyezik a valószínűséggel, hogy az él a feszítőfában van. Ismert, hogy a várható érték lineáris, így

$$\sum_{uv\in E} \max\left(\frac{1}{d_v}, \frac{1}{d_u}\right) \leq \sum_{uv\in E} \mathbb{E}(\mathbb{I}_{uv}) = \mathbb{E}\left(\sum_{uv\in E} \mathbb{I}_{uv}\right) = |V| - 1$$

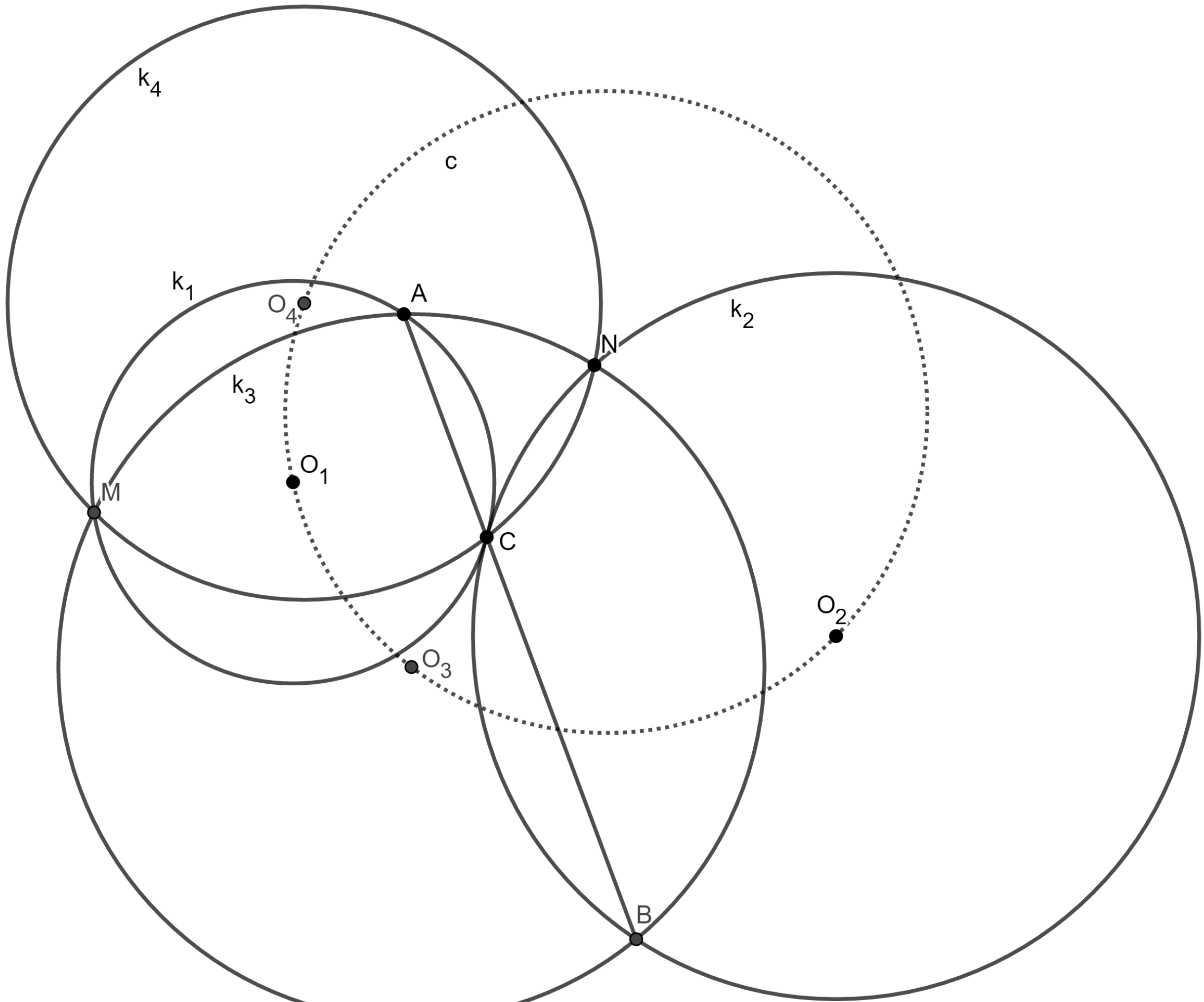
ahol az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert az indikátorok összegeinek várható értéke pont azt adja meg, hogy várhatóan hány éle van a feszítőfának.

E+3. Legyen k_1 és k_2 két, egymást a C pontban kívülről érintő kör. Az A pont a k_1 körön helyezkedik el, a B pont pedig a k_2 körön úgy, hogy C az AB szakasz belső pontja. Legyen k_3 olyan kör, ami áthalad az A és B pontokon, illetve még egyszer elmetszi a k_1 és k_2 köröket rendre az M és N pontokban. Jelölje k_4 a CMN köréírt körét.
Igazoljátok, hogy a k_1, k_2, k_3, k_4 körök középpontjai egy körre illeszkednek.

Megoldás: A fő észrevétel az, hogy két kör két metszéspontját összekötő egyenes merőleges a középpontjaikat összekötő egyenesre. Ennek segítségével már szögszámolással könnyen támadható a feladat.

Irányított szögekkel számolunk.

Legyenek O_1, O_2, O_3, O_4 rendre a k_1, k_2, k_3, k_4 körök középpontjai. $O_1O_4 \perp MC$, mivel k_1 és k_4 az M és C pontokban metszik egymást. Ugyanígy $O_1O_3 \perp AM$, így $O_3O_1O_4\sphericalangle = AMC\sphericalangle$. Hasonlóan $O_2O_3 \perp BN$ és $O_4O_2 \perp CN$, így $O_3O_2O_4\sphericalangle = BNC\sphericalangle$. k_1 és k_2 érintik egymást, így AC-hez a k_1 körön ugyanakkora kerületi szög tartozik, mint BC-hez a k_2-n, tehát $AMC\sphericalangle = BNC\sphericalangle$. Ezt az előzőekkel öszevetve $O_3O_1O_4\sphericalangle = O_3O_2O_4\sphericalangle$, ami pont azt jelenti, hogy O_1, O_2, O_3, O_4 egy körre esnek.



E+4. Legyenek p és q egész együtthatós polinomok úgy, hogy a p polinom n-edfokú és n darab nemnegatív valós gyöke van (multiplicitással számolva). Ilyen feltételek mellett mely (p, q) polinomok elégítik ki a

$$p(x^2) + q(x^2) = p(x)q(x)$$

egyenletet?

Megoldás: Legyen q fokszáma k. Ekkor $p(x)q(x)$ fokszáma $n+k$. Ha $k > n$, akkor $p(x^2)+q(x^2)$ foka $2k \neq n+k$. Ha $k < n$, akkor $p(x^2)+q(x^2)$ foka $2n \neq n+k$. Az egyetlen lehetőség tehát az, ha q is n-edfokú.

Legyen p főegyütthatója a és q főegyütthatója b. Ekkor $p(x)q(x) = p(x^2)+q(x^2)$-ben a főegyüttható $ab = a+b$, tehát $ab-a-b = 0$, azaz $(a-1)(b-1) = 1$. Mivel a és b is nemnulla egész, ez csak úgy lehet, ha $a = b = 2$.

Ha $p(x)$-ben a 0 r-szeres gyök, $q(x)$-ben pedig s-szeres gyök, akkor $p(x)q(x)$-ben $r+s$-szeres gyök. Ha $r < s$, akkor $p(x^2)+q(x^2)$ osztható x^{2r}-nel, de x nagyobb kitevőjével már nem: $2r \neq r+s$. Ugyanígy, ha $s < r$, akkor $p(x^2)+q(x^2)$ osztható x^{2s}-nel, de x nagyobb kitevőjével már nem: $2s \neq r+s$. Tehát csak úgy állhat fönn egyenlőség, ha $r = s$.

Legyen $p(x) = x^r P(x)$ és $q(x) = x^r Q(x)$, ahol sem P-nek, sem Q-nak nem gyöke a 0. Ekkor $x^{2r}P(x)Q(x) = x^{2r}(P(x^2)+Q(x^2))$, azaz $P(x)Q(x) = P(x^2)+Q(x^2)$. Az továbbra is igaz, hogy P és Q azonosan m-ed fokú, és mindkettőnek 2 a főegyütthatója.

$p(x)$-nek csak nemnegatív valós gyökei voltak, így $P(x)$-nek csak pozitív valós gyökei vannak. Mivel $P(x^2)+Q(x^2)$ páros függvény, ezért $P(x)Q(x)$ is az, tehát ha x gyök, akkor $-x$ is az. Ebből következik, hogy $P(x)$ pozitív gyökeinek ellentettjei is gyökei $P(x)Q(x)$-nek, és mivel ezek nem pozitívak, nem lehetnek $P(x)$ gyökei, csak $Q(x)$-é. Tehát ha $P(x) = 2(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_m)$, akkor $Q(x) = 2(x+r_1)(x+r_2)\dots(x+r_m)$. Ezek alapján

$$P(x)Q(x) = 4(x^2-r_1^2)(x^2-r_2^2)\dots(x^2-r_m^2) = 2(x^2-r_1)(x^2-r_2)\dots(x^2-r_m)+2(x^2+r_1)(x^2+r_2)\dots(x^2+r_m)$$

x^2-et y-nak nevezve azt kapjuk, hogy

$$4(y-r_1^2)(y-r_2^2)\dots(y-r_m^2) = 2(y-r_1)(y-r_2)\dots(y-r_m)+2(y+r_1)(y+r_2)\dots(y+r_m)$$

Tegyük fel, hogy P nem konstans polinom. P konstans tagja egész, és nem 0, mivel a gyökök között már nem szerepel a 0. Tehát a konstans tag abszolútértéke legalább 1. A konstans tag a gyökök szorzata valamilyen előjellel, tehát az r_i gyökök vagy mind 1 abszolútértékűek, vagy van közöttük 1-nél nagyobb abszolútértékű. Tudjuk, hogy az r_i gyökök mind pozitívak, tehát vagy mind egyenlők 1-gyel, vagy közülük a legnagyobb (amit r_m-nek nevezek), nagyobb 1-nél.

Ha minden $r_i = 1$, akkor $4(y-1)^m = 2(y-1)^m + 2(y+1)^m$, azaz $(y-1)^m = (y+1)^m$, ami lehetetlen.

Ha pedig r_m a legnagyobb gyök, és $r_m > 1$, akkor $y = r_m^2$ esetén

$$4(y-r_1^2)(y-r_2^2)\dots(y-r_m^2) = 0$$

Viszont $r_m^2 > r_m \geq r_i$ minden i-re, így $2(y-r_1)(y-r_2)\dots(y-r_m)$ pozitív tagok szorzata $y = r_m^2$-re, $2(y+r_1)(y+r_2)\dots(y+r_m)$ pedig értelemszerűen szintén pozitív tagok szorzata $y = r_m^2$-re. Tehát $2(y-r_1)(y-r_2)\dots(y-r_m)+2(y+r_1)(y+r_2)\dots(y+r_m)$ pozitív az $y = r_m^2$ helyen. Vagyis $4(y-r_1^2)(y-r_2^2)\dots(y-r_m^2) \neq 2(y-r_1)(y-r_2)\dots(y-r_m)+2(y+r_1)(y+r_2)\dots(y+r_m)$.

Ezek szerint az egyetlen fennmaradó lehetőség, hogy P és Q konstans függvények. Már megmutattuk, hogy a főegyütthaatójuk 2, tehát $P(x)$ és $Q(x)$ is a konstans 2 polinom. Tehát csak $p(x) = 2x^n, q(x) = 2x^n$ alakú lehet a megoldás. Ez valóban megoldás, mert $p(x)$-nek n nemnegatív valós gyöke van és $p(x)q(x) = 4x^{2n} = p(x^2)+q(x^2)$.

E+5. Legfeljebb hány síkot határoz meg n különböző egyenes a térben, amelyek közül semelyik kettő sem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton?
Egy sík meg van határozva, ha tartalmaz legalább kettőt az egyenesek közül.

Megoldás: páros esetben $\frac{n^2}{4}$, páratlan esetben $\frac{(n-1)(n+1)}{4}$, azaz általánosan $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Felső becslés: Legyen adott n egyenes a térben, amelyek között nincsenek párhuzamosak és nincs 3 egy ponton átmenő. Tekintsük azt a G gráfot, amelynek a csúcsai az egyenesek, és minden, az egyenesek által meghatározott síkhoz pontosan egy élet húzunk be, mégpedig két olyan egyeneshez tartozó csúcs között, amelyek meghatározzák az adott síkot. Így pontosan annyi élünk van, ahány meghatározott sík. Azt állítjuk, hogy a G gráfban nincs háromszög.

Indirekten tegyük fel, hogy van benne háromszög, azaz van három különböző egyenes, e_1, e_2 és e_3 illetve három különböző sík, s_1, s_2 és s_3, hogy e_1 és e_2 meghatározza az s_3 síkot, e_1 és e_3 meghatározza az s_2 síkot, e_2 és e_3 meghatározza az s_1 síkot. Mivel nincsenek párhuzamos egyenesek, így két egyenes csak akkor határoz meg síkot, ha metszik egymást, tehát az e_1, e_2, e_3 egyenesek páronként metszőek. Mivel nem mennek át egy ponton, ezért ez csak úgy lehet, hogy egy háromszöget alkotnak, ám ekkor benne fekszenek egy síkban, így s_1, s_2 és s_3 nem lehetnek különbözők, ami ellentmondás. Tehát tényleg nincs háromszög G-ben, így a Turán-tétel szerint legfeljebb $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ éle lehet, azaz legfeljebb ennyi síkot határozhatnak meg az egyenesek, és pont ezt akartuk igazolni.

Alsó becslés: Egy konstrukciót kell adni n egyenesre, amik $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ síkot htároznak meg. Tudjuk, hogy a Turán-tételben mikor van egyenlőség, így a felső becslésből látszik, hogy olyan konstrukciót kell keresni, ahol az egyenesek két nagyjából egyenlő részre oszthatók, és pontosan azok metszik egymást, amelyek különböző csoportban vannak. Az ötlet az, hogy keressük az alábbi alakban az egyeneseket: Legyenek az egyik csoportban olyan egyenesek, amelyeknek az xy koordináta-síkra vett merőleges vetülete párhuzamos az x tengellyel, konkrétan legyen az e_k egyenes vetületének egyenlete $y = k$ ahol $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Hasonlóan, a másik csoportban legyen f_k vetülete az xy síkra $x = k$ minden $1 \leq k \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ esetén. Ezek után úgy akarjuk beállítani az egyenesek meredekségeit az xy koordináta-síkhoz képest, hogy az e egyeneseknek páronként különböző legyen a meredeksége, hogy kitérőek legyenek, hasonlóan az f egyenesek között se legyenek azonos meredekségűek, és bármely e_i és f_j messe egymást. Szerencsénkre, ez tényleg megtehető:

Legyen minden $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ esetén az e_k egyenes az $y = k$, $z = kx$ egyenlettekkel megadva. Hasonlóan minden $1 \leq k \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ esetén legyen f_k az $x = k$, $z = ky$ egyenletrendszerrel definiálva. Ekkor tetszőleges $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \leq j \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ esetén e_i és f_j is áthalad a (j, i, ij) ponton, mivel kielégíti mindkét egyenes egyenletét. Világos, hogy ezek a metszéspontok különnböző egyenesek esetén különbözőek, így nincs 3 egy ponton átmenő egyenes, és a meredekségeket különbözőre választottuk, így párhuzamos egyenesek se lehetnek. Ez tehát tényleg egy megfelelő konstrukció n egyenessel, amik $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ síkot határoznak meg.

Megjegyzés: Konstrukciót forgási hiperboloid segítségével is egyszerűen lehet adni.