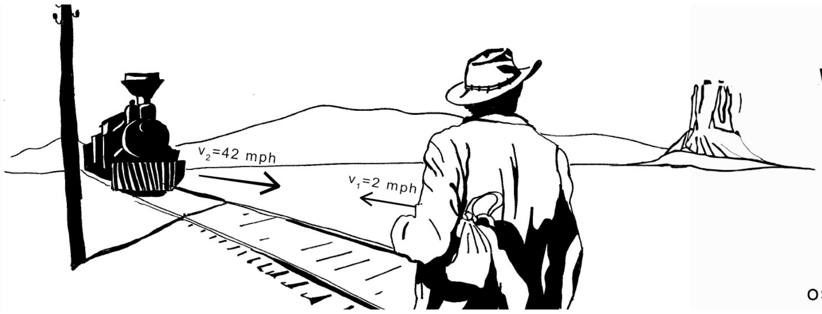
XIV. Dürer Verseny

**FIZIKA**

megoldások

Helyi forduló:
2020. november 20.




F kategória

10-12.
osztályosok

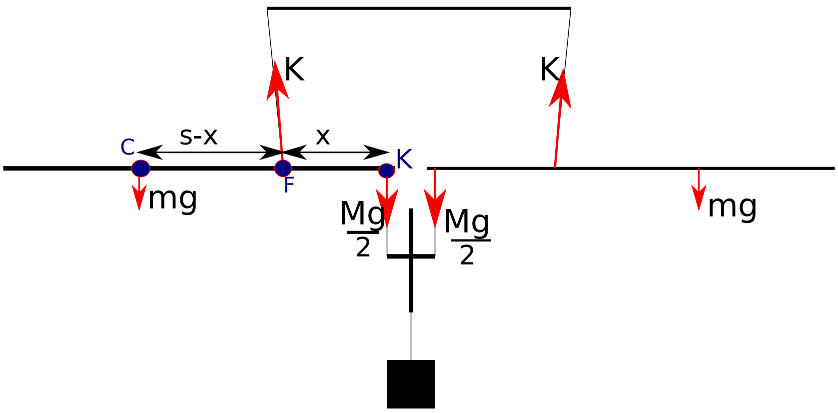
# 1. Feladat

## (a)

Vizsgáljuk a bal oldali szárny egyensúlyát! Egyensúlyban két feltételnek kell teljesülnie:

- A szárnyra ható erők eredője legyen nulla.
- A szárny tetszőleges pontjára ható forgatónyomatékok összege is legyen nulla.

Utóbbinál érdemes valamelyik felfüggesztési pontot választani, például az $F$ pontot, ugyanis ekkor nem kell foglalkozni az ábrán jelölt $\boldsymbol{K}$ erővel, mert annak nincs erre vonatkoztatva forgatónyomatéka.



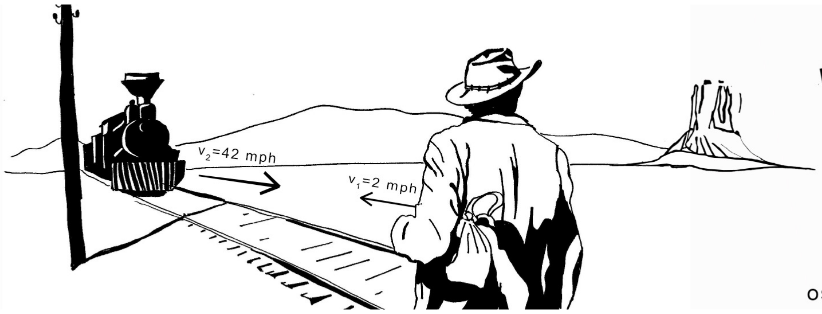

Most vegyük sorra a forgatónyomatékkal rendelkező erőket! A madár testének tömege megoszlik a két szárnyhoz kötött cérnán, így a $K$ pontban ható erő függőleges komponense $Mg/2$, amelynek erőkarja $x$. A másik lényeges erő a szárnyra ható nehézségi erő, amit úgy kell figyelembe venni mintha a $C$ tömegközéppontban hatna $mg$ nagyságú függőleges erő, amelynek erőkarja $s - x$. Alkalmazzuk a forgatónyomatékra vonatkozó második feltételt, miszerint $mg(s - x) = Mgx/2$, ezt átrendezve:

$$\boxed{\frac{M}{m} = 2\left(\frac{s}{x} - 1\right)}\,.$$

## (b)

A legkisebb lehetséges értéket úgy kapjuk, ha a fenti képletben $s$ helyébe $(11{,}2 - 0{,}2)$ cm-t és $x$ helyébe $(6{,}0 + 0{,}1)$ cm-t írunk. A legnagyobb értéknél $s$ helyébe $(11{,}2 + 0{,}2)$ cm és $x$ helyébe $(6{,}0 - 0{,}1)$ cm írandó. Ezeket behelyettesítve az $M/m$ hányados lehetséges értékei:

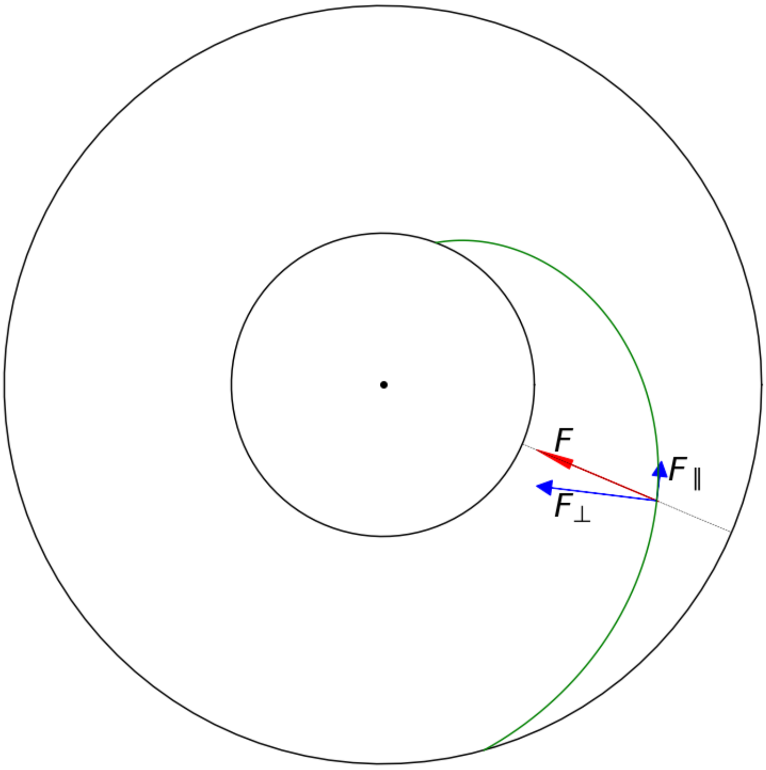
$$\boxed{1{,}607 \leq \frac{M}{m} \leq 1{,}864}\,.$$

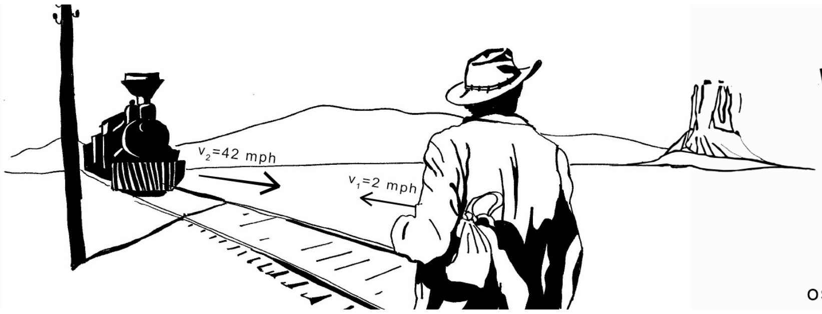





# 2. Feladat

Az ábra felülnézetből mutatja azt a pályát, amit Joe teste bejár a piruetten való kísérletezéskor. A külső kört Joe teste kinyújtott karok esetén járja be, a belső kör pedig a karok behúzása utáni körpálya. Miközben behúzza a karjait, Joe teste az említett két körpályát összekötő, az ábrán zölddel jelölt spirálpályát járja be. A Joe karjai által kifejtett $\boldsymbol{F}$ húzóerő felbontható egy pályára merőleges $\boldsymbol{F}_\perp$ és egy azzal párhuzamos $\boldsymbol{F}_\parallel$ komponensre. A pályával párhuzamos $\boldsymbol{F}_\parallel$ erőkomponens növeli Joe testének kerületi sebességét, ez tehát a dinamikai magyarázata a feladatan vizsgált jelenségnek.








# 3. Feladat

## (a)

Az ideális gáz $pV = nRT$ állapotegyenletében $n$ az anyagmennyiség kifejezhető a levegő $M$ moláris tömeggel és $m$ tömegével: $n = m/M$. Ezt beírva az állapotegyenletbe, a sűrűség kifejezhető:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \, .$$

Most számoljuk ki az 5 °C-os levegő sűrűségét! A hőmérsékletet kelvinben kifejezve $T_0 =$ 278,15 K, így a sűrűség:

$$\boxed{\rho_0 = \frac{pM}{RT_0} = 1{,}269 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \, .$$

## (b)

A lampion akkor lebeg, ha egészének átlagsűrűsége megegyezik a külső levegő $\rho_0$ sűrűségével. A $V'$ térfogat nagy részét a gyertya és annak tartószerkezete teszi ki, ami a ballon $V = 60$ l-es űrtartalmából vesz el helyet. A ballonban levő levegő térfogata így $V - V'$. A lampion és a benne levő levegő össztömege $m' + \rho(V - V')$, ahol $\rho$ a ballonon belüli levegő sűrűsége. Ezek alapján a külső levegő és lampion sűrűségeinek egyenlősége az alábbi feltételt adja:

$$\rho_0 = \frac{m' + \rho(V - V')}{V} \, ,$$

Ebből kifejezhető a $\rho$ sűrűség:

$$\boxed{\rho = \frac{V}{V - V'}\left(\rho_0 - \frac{m'}{V}\right) = 1{,}0359 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \, .$$

Itt a megadott adatok alapján a térfogatarány $V'/V = 0{,}00025$, amely nagyon kicsi. Ezáltal szinte ugyanazt kapjuk, ha elhanyagoljuk $V'$-t $V$-hez képest:

$$\boxed{\rho \approx \rho_0 - \frac{m'}{V} = 1{,}0356 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \, .$$

## (c)

A ballonon belül a levegő nyomása szintén

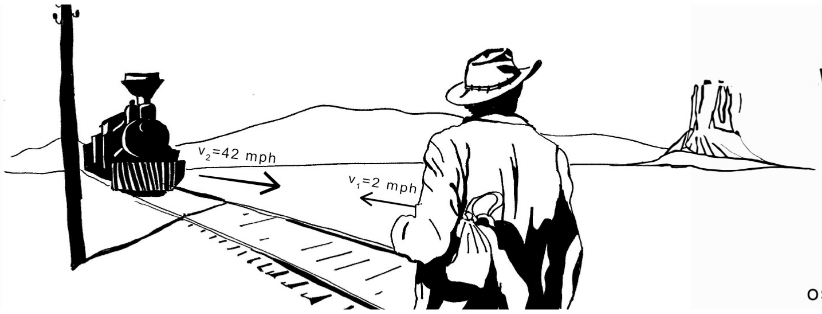
$$\boxed{p = 1{,}0133 \cdot 10^5 \ \mathrm{Pa}} \, ,$$

A hőmérséklet és a sűrűség közti kapcsolatból

$$T = \frac{pM}{R\rho} = 340{,}73 \ \mathrm{K} \, ,$$

ebből levonva 273,15 K-t kapjuk a benti hőmérsékletet Celsiusban:

$$\boxed{t \approx 67{,}58 \ {}^\circ C} \, .$$






### (d)

Ha a hőmérséklet az előző feladatrészben kiszámoltnál 1 °C-kal magasabb, akkor a lampion emelkedni kezd. Ekkor a hőmérséklet és a sűrűség az előzőek alapján

$$T_1 = 341{,}73 \text{ K} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_1 = \frac{pM}{RT_1} = 1{,}0329 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \ .$$

A lampion akkor emelkedik állandó sebességgel, ha a rá ható eredő erő nulla. Felfele a $\rho_0 V g$ felhajtóerő, lefele a nehézségi erő és a közegellenállási erő hat a lampionra. A közegellenállási erő formulája:

$$F_\text{k} = \frac{k}{2}\rho_0 A v^2 \ .$$

Itt $k$ a lampion formáját jellemző közegellenállási tényező, $\rho_0$ a külső levegő sűrűsége, $A$ test mozgásra merőleges (legnagyobb) kereszmetszete, $v$ pedig a a test sebessége. Az $A$ keresztmetszet becsléséhez számoljuk ki egy $V = 60$ l térfogatú gömb kereszmetszetét:

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi \qquad \Longrightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \qquad \Longrightarrow \qquad A = r^2\pi = 0{,}185 \ m^2 \ .$$

Ennél feltehetőleg valamivel kisebb a keresztmetszet, ezért $A \approx 0{,}18$ m$^2$-nek becsülhetjük. A gömb közegellenállási tényezője $k = 0{,}45$, így a lampion esetén is jó becslés a $k = 0{,}45$ érték. Egyensúlyban a testre ható erők összege zérus (felhajtóerő = nehézségi erő + közegellenállási erő), így a sebesség kifejezhető:

$$\rho_0 V g = \Big(\rho_1 (V - V') + m'\Big) g + \frac{k}{2}\rho_0 A v^2 \ ,$$

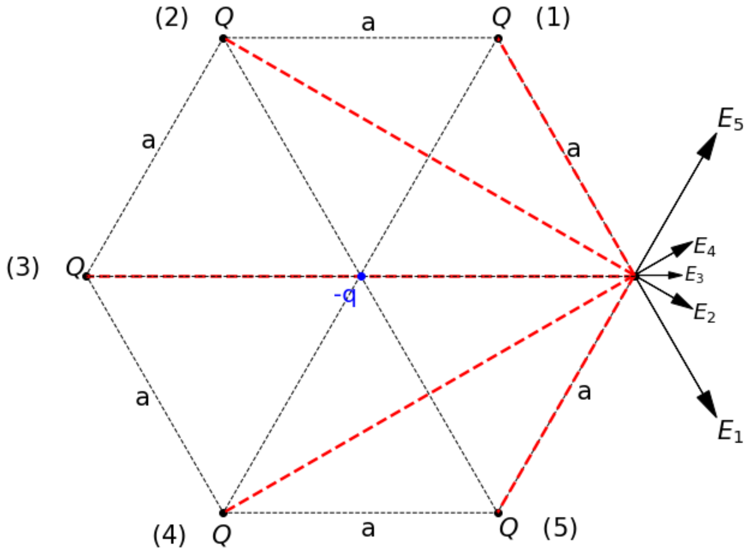
$$\boxed{v = \sqrt{2g \cdot \frac{\rho_0 V - \rho_1 V + \rho_1 V' - m'}{k \rho_0 A}} = 0{,}177 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 18 \ \frac{\text{cm}}{\text{s}}} \ .$$

## 4. Feladat

### (a)

A töltésrendszer akkor van egyensúlyban, ha minden töltésre ható eredő erő zérus. A kérdéses negatív töltést jelöljük $-q$-val, így $q/Q$-ra pozitív értéket fogunk kapni. A $-q$ töltés mindenképpen egyensúlyban lesz, mert a többi hat töltés szimmetrikusan hat rá. A csúcsokban levő töltések szimmetria folytán teljesen egyenrangúak, ezért elég az egyik csúcsban levő töltés egyensúlyát vizsgálni. Elektrosztatikában egy $Q$ töltésre ható erő $\boldsymbol{F} = Q \cdot \boldsymbol{E}$ alakba írható, ahol $\boldsymbol{E}$ az elektromos térerősség vektort jelöli.

Egy ponttöltésre ható eredő erő csak akkor nulla, ha a ponttöltés helyén a térerősség is nulla, ezért erők helyett térerősségekkel számolunk a megoldásban. Keressük meg azt a $-q$ töltést amivel az ábra jobb szélén levő $Q$ töltés helyén nulla lesz a térerősség!




A többi $Q$ töltés által létrehozott $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$,.. térerősségeket szemlélteti az ábra. Az vektorok abszolút értékei:

$$|\boldsymbol{E}_1| = |\boldsymbol{E}_5| = k\frac{Q}{a^2}, \quad |\boldsymbol{E}_2| = |\boldsymbol{E}_4| = k\frac{Q}{(\sqrt{3}a)^2}, \quad |\boldsymbol{E}_3| = k\frac{Q}{(2a)^2}\ .$$

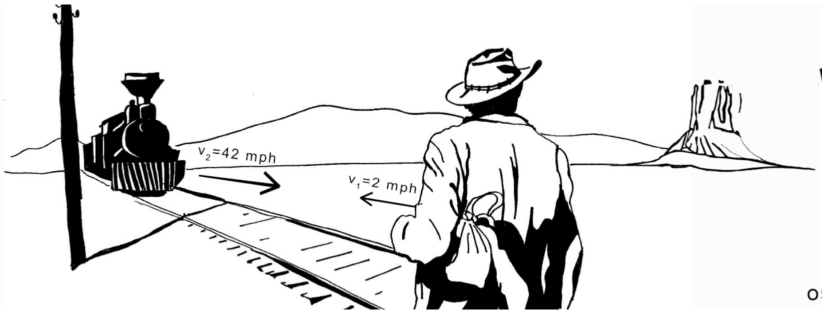
A $-q$ töltésnek olyannak kell lennie, hogy az általa létrehozott térerősségvektor az $\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \boldsymbol{E}_4 + \boldsymbol{E}_5$ vektori összeg $(-1)$-szerese legyen. Az $\boldsymbol{E}_1$ és $\boldsymbol{E}_5$ vektorok 60°-os, az $\boldsymbol{E}_2$ és $\boldsymbol{E}_4$ vektorok 30°-os szöget zárnak be a vízszintessel ezért $|\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_5| = 2|\boldsymbol{E}_1|\cos 60°$ és $|\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_4| = 2|\boldsymbol{E}_2|\cos 30°$. Összességében a következő egyenlet írható fel az egyensúéy feltételeként:

$$k\left(\frac{Q}{4a^2} + 2\frac{Q}{3a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\frac{Q}{a^2}\frac{1}{2}\right) = k\frac{q}{a^2}\ .$$

Az egyenletet $a^2/k$-val beszorozva megkapjuk $q$ értékét:

$$\boxed{q = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4}\right) Q \approx 1{,}83\ Q}\ .$$

Azaz $-(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{4})Q$ nagyságú töltést kell rakni a hatszög közepébe. Az eredményben nem szerepel, az $a$ távolság, azaz független attól.






## (b)

A rendszer töltéseinek távolságát, és azok előfordulási számát alább összefoglaljuk:

- 6 db olyan $Q, Q$ töltéspár van, amelyek közt a távolság $a$
- 6 db olyan $Q, Q$ töltéspár van, amelyek közt a távolság $\sqrt{3}a$
- 3 db olyan $Q, Q$ töltéspár van, amelyek közt a távolság $2a$
- 6 db $-q, Q$ töltéspár van, a köztük levő távolság $a$.

Mindezeket felhasználva:

$$W = k\left(6\frac{Q^2}{a} + 6\frac{Q^2}{\sqrt{3}a} + 3\frac{Q^2}{2a} - 6\frac{qQ}{a}\right) = \frac{kQ}{a}\left[\left(\frac{15}{2} + 2\sqrt{3}\right)Q - 6q\right].$$

Az előző feladatrészben kiszámolt $q = (\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4})Q$ értéket behelyettesítve látható, hogy

$$\boxed{W = 0}\,.$$

## Megjegyzés:

Nem véletlenül kaptunk $W$-re zérus értéket. Általánosan igaz, hogy minden töltésrendszer ami elektrosztatikus egyensúlyban van, annak teljes potenciális energiája 0. Lássunk erre egy rövid magyarázatot!

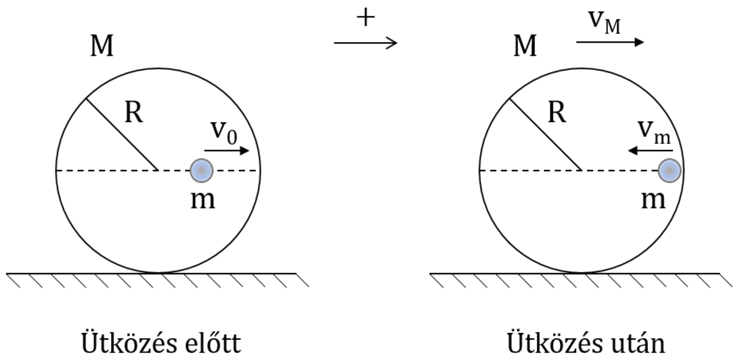
Képzeljünk el egy tetszőleges töltésrendszert ami elektroszatikus egyensúlyban van. Ennek a töltésrendszernek a teljes potenciális energiáját jelöljük $W$-vel, amiről be fogjuk látni, hogy zérus. Most képzeljük el, hogy minden egyes töltéspár között a távolságot $\lambda$-szorosára növeljük, azaz $\lambda$-szoros méretre felfújjuk a töltésrendszert.

A kiinduló helyzetben minden egyes töltésre igaz volt, hogy az arra ható eredő erő zérus. Ha $\lambda$-szorosára felfújjuk a töltésrendszert, akkor is igaz, hogy minden egyes töltésre az eredő erő nulla. Ez azt jelenti, hogy zérus munkavégzéssel lehet $\lambda$-szoros méretre felfújni a töltésrendszert, azaz a bármely pozitív $\lambda$ szám esetén azonos a $W$ teljes potenciális energia. Mi történik, ha $\lambda$ értékét folyamatosan növelve végtelenségig növeljük a felfújást? Ekkor bármely két töltéspár között a potenciális energia nullához tart, így ezek összege, azaz a teljes potenciális energia is nulla. Az is igaz, hogy az egyensúlyban levő töltésrendszer egyensúlya csakis instabil lehet. Azaz bármelyik töltést egy picit kimozdítjuk egy bizonyos irányba, akkor szétrepülnek a töltések.

# 5. Feladat

## (a)

**I.** Ábra



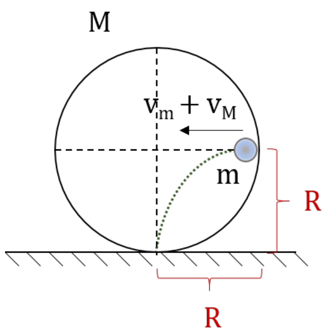

**II.** Mivel vízszintesen a külső erők eredője zérus, így

$$\sum \boldsymbol{I}_{\mathrm{v}} = \text{konstans} \quad \Longrightarrow \quad mv_0 = Mv_M - mv_m\ . \tag{1}$$

**III.** Az ütközés rugalmas, így

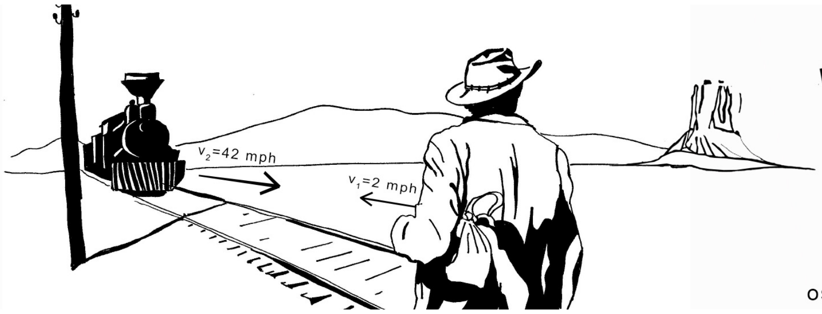
$$\sum E_{\mathrm{mech}} = \text{konstans} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2\ . \tag{2}$$

**IV.** „Üljünk át” az abronccsal együtt mozgó koordinátarendszerbe!
Ebben a rendszerben az $m$ tömegű test ütközés utáni mozgása egy vízszintes hajítás, ahogyan az alábbi ábra mutatja.




A hajítás leírása:

$$\Delta r_{x,rel} = R = (v_m + v_M)\Delta t\ , \qquad \Delta r_{y,rel} = R = \frac{g}{2}\Delta t^2 \Longrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2R}{g}}\ .$$





A két egyenlet alapján:

$$R = (v_m + v_M)\sqrt{\frac{2R}{g}}\ . \tag{3}$$

**V.** Összefoglalva az egyenleteket:

$$(1) \quad \Longrightarrow \quad m(v_0 + v_m) = Mv_M\ ,$$

$$(2) \quad \Longrightarrow \quad m(v_0^2 - v_m^2) = Mv_M^2\ .$$

Elosztva egymással a két egyenletet:

$$v_0 - v_m = v_M\ . \tag{4}$$

Ebbe az (1) egyenletet beírva:

$$R = v_0\sqrt{\frac{2R}{g}} \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_0 = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\ .$$

## (b)

**I.** Számítsuk ki az abroncs és a kis test ütközés utáni sebességét!
A kis testre:

$$(1), (4) \quad \Longrightarrow \quad mv_0 = Mv_0 - Mv_m - mv_m \quad \Longrightarrow \quad v_m = \frac{M-m}{M+m}v_0\ .$$

Az abroncs esetén az előzőt beírva (4)-be:

$$v_M = \frac{2m}{M+m}v_0\ .$$

**II.** Az abroncs elmozdulása

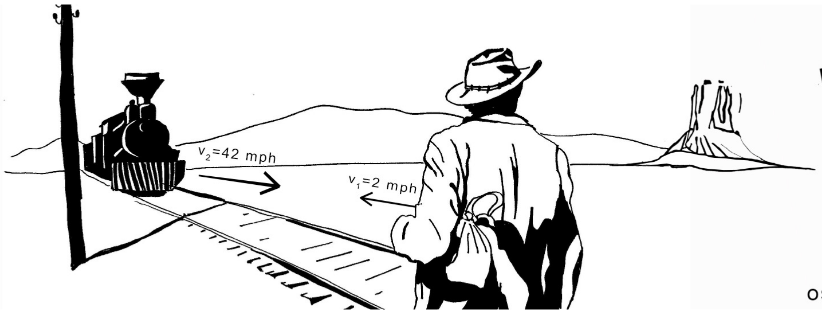
$$\Delta r_M = v_M\Delta t = \frac{M-m}{M+m}v_0\Delta t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta r_M = 10\ \mathrm{cm}}\ .$$

## (c)

Az $m$ tömegű test vízszintes elmozdulása:

$$|\Delta r_m| = v_m\Delta t = \frac{2m}{M+m}v_0\Delta t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\Delta r_m| = 10\ \mathrm{cm}}\ .$$

(*Megjegyzés:* Az abszolútérték jel azt jelzi, hogy az elmozdulás az abroncs elmozdulásával ellentétes irányú.)






## (d)

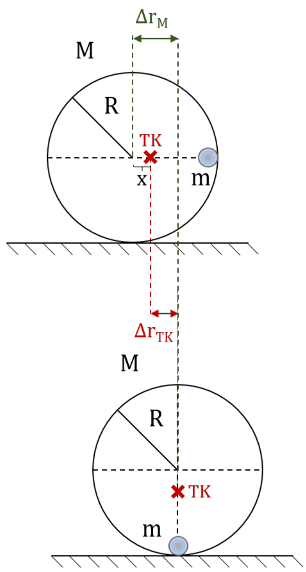
### 1. megoldás

Használjuk fel, hogy a tömegközéppont vízszintes elmozdulása a rendszert alkotó komponensek vízszintes elmozdulásainak tömeggel súlyozott átlaga:

$$\Delta r_{\mathrm{TK}} = \frac{M\Delta r_M - m\Delta r_m}{m+M} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Delta r_{\mathrm{TK}} = 5\ \mathrm{cm}}\ .$$

### 2. megoldás

Határozzuk meg a tömegközéppont helyzetét a kezdő és végállapotban az alábbi ábra alapján!




A tömegközéppont távolsága az abroncs középpontjától a kiinduló állapotban:

$$x = \frac{R}{m+M} m = 5\ \mathrm{cm}\ .$$

Az ábra alapján:

$$\Delta r_{\mathrm{TK}} = \Delta r_M - x \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Delta r_{\mathrm{TK}} = 5\ \mathrm{cm}}\ .$$