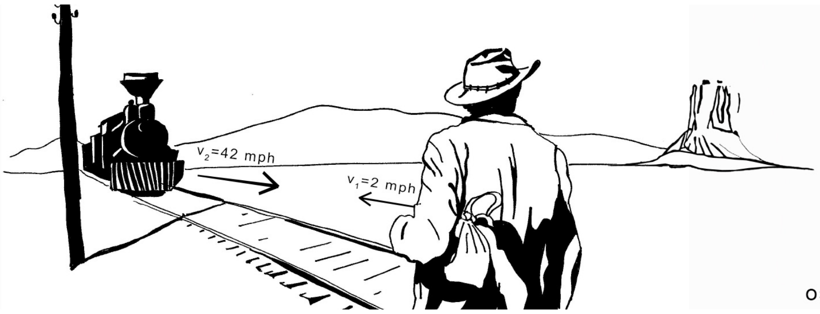
XIV. DÜRER VERSENY

FIZIKA

megoldások

Helyi forduló:
2020. november 20.



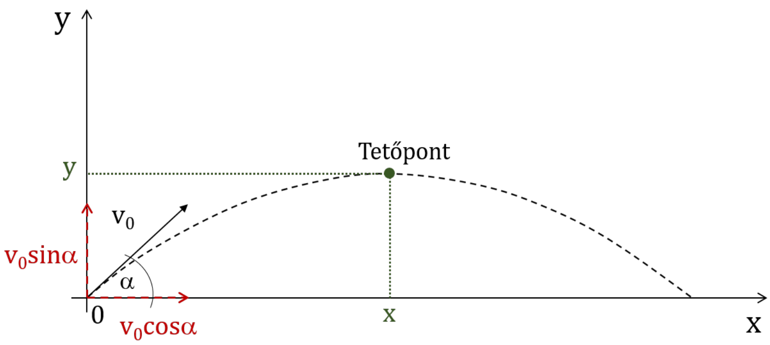

F+ kategória

10-12. osztályosok

# 1. Feladat

## (a)

**I.** Írjuk fel egy adott $\alpha$ szög esetén a pálya tetőpontjának koordinátáit!




A ferde hajítás általános összefüggéseit felhasználva a csúcspontok $x$ és $y$ koordinátái:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \,, \tag{1}$$

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \,. \tag{2}$$

**II.** Matematikai elemzés

$$(1) \quad \Longrightarrow \quad \sin 2\alpha = \frac{2gx}{v_0^2} \,.$$

Addíciós tételt felhasználva:

$$(2) \quad \Longrightarrow \quad \cos 2\alpha = 1 - \frac{4gy}{v_0^2} \,.$$

Használjuk fel továbbá, hogy

$$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \,.$$

Ebbe az előzőeket behelyettesítve és rendezve:

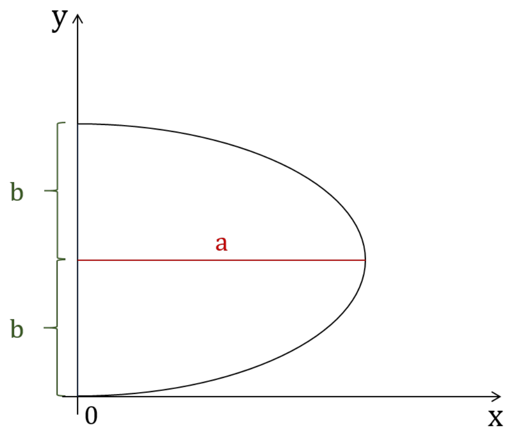
$$\frac{4g^2x^2}{v_0^4} + \left(1 - \frac{4gy}{v_0^2}\right)^2 = 1 \,,$$

$$\boxed{\frac{x^2}{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2}{\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2} = 1} \,.$$

Mivel $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$, így $x \geq 0$, azaz a kapott görbe egy félellipszis.

## (b)

**I.** Ábrázoljuk a kapott görbét!




**II.** Az egyenlet alapján az ellipszis jellemző paraméterei:

- Fél nagytengely: $a = \frac{v_0^2}{2g}$
- Fél kistengely: $b = \frac{v_0^2}{4g}$

Ezek helyességét kell ellenőrizni speciális hajítási esetekkel:

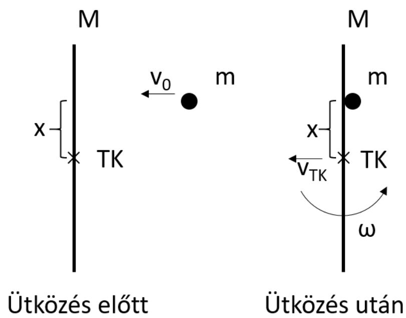
- $a = \frac{v_0^2}{2g} \implies x_{\max}$-hoz tartozó pálya tetőpontja $\implies$ Ekkor ismert, hogy $\alpha = 45°$

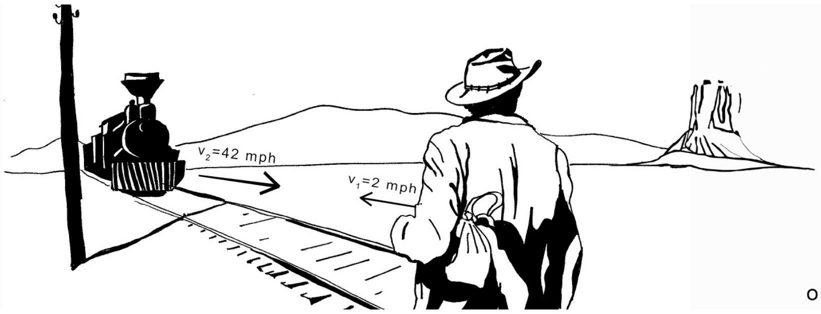
  A tetőpont vízszintes koordinátája: $x_{45} = \frac{v_0^2 \sin 90}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} = a$ ✓

- $b = \frac{v_0^2}{4g} \implies$ Függőleges felfelé hajítás: $y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 2b$ ✓

# 2. Feladat

**I.** Ábra:








**II.** A jelenség értelmezése

Az ütközés után a rúd „forogva haladó” mozgást végez, azaz a tömegközéppont mozog $v_{\text{Tk}}$ sebességgel, és a tömegközéppont körül $\omega$ szögsebességgel forog. A pontszerű test pedig megáll, a szöveg alapján.

**III.** Mivel a külső erők eredője zérus, írjuk fel a lendületmegmaradás törvényét!

$$\sum I = \text{konstans} ,$$
$$mv_0 = Mv_{\text{Tk}} ,$$
$$v_{\text{Tk}} = \frac{m}{M} v_0 . \tag{3}$$

**IV.** Mivel az ütközés rugalmas, érvényes a mechanikai energiamegmaradás törvénye:

$$\sum E_{\text{mech}} = \text{konstans} ,$$
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} M v_{\text{Tk}}^2 + \frac{1}{2} \theta_{\text{Tk}} \omega^2 ,$$
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} M v_{\text{Tk}}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} M L^2 \omega^2 .$$

A (3)-as egyenletet felhasználva:

$$\omega = \sqrt{\frac{12 m v_0^2 (M - m)}{M^2 L^2}} . \tag{4}$$

**V.** A külső erők forgatónyomatéka zérus, így felírhatjuk a perdületmegmaradást:

$$\sum N = \text{konstans} ,$$
$$m v_0 x = \theta_{\text{Tk}} \omega ,$$
$$m v_0 x = \frac{1}{12} M L^2 \omega .$$

A (4)-es egyenletet behelyettesítve és rendezve:

$$\frac{M}{m} = \frac{12 x^2}{L^2} + 1$$

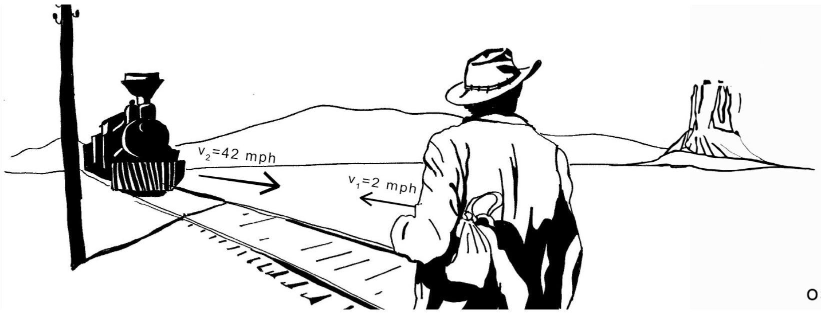
**VI.** Matematikai vizsgálat

Mivel $x$ értéke az $[0, \frac{L}{2}]$ intervallumba eshet, a tömegarányokra a következő feltételeket kapjuk:

$$x_{\min} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{M}{m} \geq 1 ,$$
$$x_{\max} = \frac{L}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{M}{m} \leq 4 ,$$

Azaz a lehetséges tömegarányok:

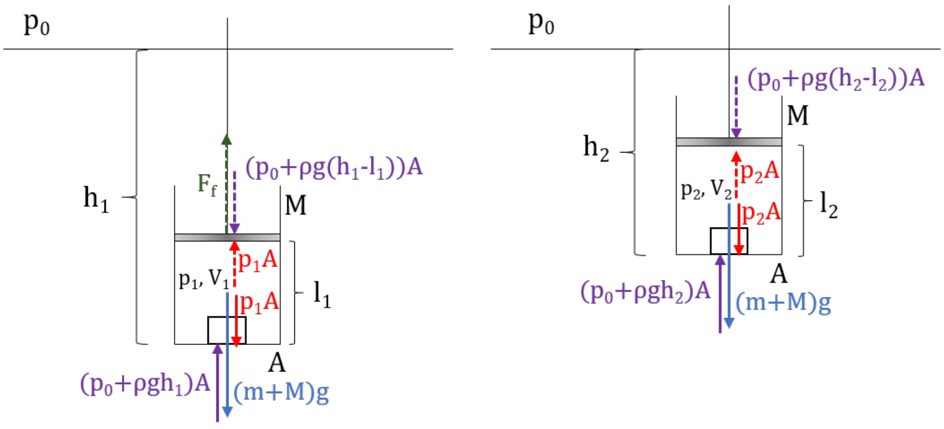
$$\boxed{1 \leq \frac{M}{m} \leq 4} .$$






# 3. Feladat

**I.** Ábra




Az egyes esetekben a hengerre, illetve a dugattyúra ható erők

Legyen a hengerben lévő levegő nyomása illetve térfogata a két állapotban $p_1$, $V_1$ és $p_2$, $V_2$. Valamint jelölje a hengerben lévő test tömegét $m$, térfogatát $V$, sűrűségét pedig $\rho_{\text{test}}$.

**II.** Mivel a hengert lassan húzzuk felfelé, a rendszer egyensúlyban van. Ekkor:

1.) $h_1$ mélységben felírva az egyensúlyt

A dugattyúra:

$$F_f + p_1A - p_0A - \rho gA(h_1 - l_1) = 0 \ . \tag{5}$$

A hengerre:

$$(m + M)g + p_1A - p_0A - \rho gh_1A = 0 \ . \tag{6}$$

2.) $h_2$ mélységben felírva az egyensúlyt

A dugattyúra (mivel ekkor a rendszer éppen lebeg, így $F_f = 0$):

$$p_2A - p_0A - \rho gA(h_2 - l_2) = 0 \ . \tag{7}$$

A hengerre:

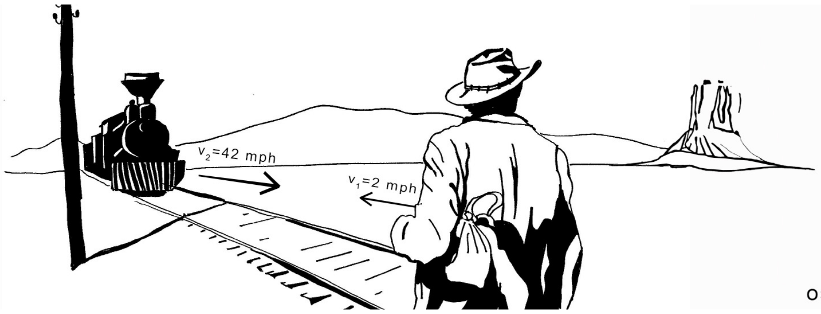
$$(m + M)g + p_2A - p_0A - \rho gh_2A = 0 \ . \tag{8}$$

**III.** Mivel a henger vékonyfalú, és lassan húzzuk fel, a folyamat során $T =$ konstans. Ez alapján felírhatjuk a két állapotra a Boyle-Mariotte törvényt:

$$p_1V_1 = p_2V_2 \ .$$

A térfogatokat részletezve: $V_1 = Al_1 - V$ és $V_2 = Al_2 - V$. Ezt beírva és rendezve:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{Al_2 - V}{Al_1 - V} \ . \tag{9}$$




**IV.** A hengerben lévő test tömegének meghatározása

$$(7),(8) \quad \Longrightarrow \quad (m+M)g = \rho g A l_2 \;,$$

$$m = \rho A l_2 - M = 100 \text{ g} \;.$$

**V.** A test térfogatának meghatározása

$$(6),(7),(8) \quad \Longrightarrow \quad \rho g A l_2 + p_1 A - p_0 A - \rho g A h_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_1 = p_0 + \rho g h_1 - \rho g l_2 \;,$$

$$(7),(8) \quad \Longrightarrow \quad \rho g A l_2 + p_2 A - p_0 A - \rho g A h_2 \quad \Longrightarrow \quad p_2 = p_0 + \rho g h_2 - \rho g l_2 \;.$$

Ezeket (9)-be beírva:

$$\frac{p_0 + \rho g h_1 - \rho g l_2}{p_0 + \rho g h_2 - \rho g l_2} = \frac{A l_2 - V}{A l_1 - V} \;.$$

A $V$ térfogatot kifejezve:

$$V = \frac{p_0 A(l_1 - l_2) + \rho g A(h_1 l_1 - h_2 l_2) + \rho g A(l_2^2 - l_1 l_2)}{\rho g (h_1 - h_2)} = 68 \text{ cm}^3 \;.$$

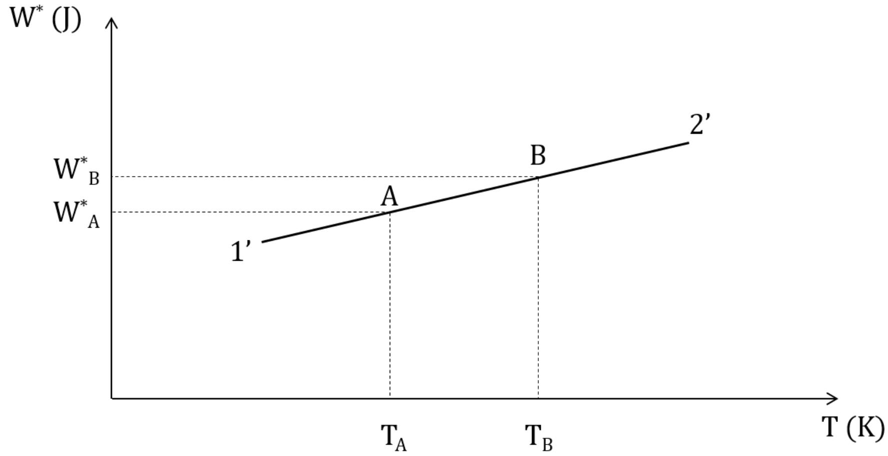
**VI.** A test sűrűsége végül:

$$\boxed{\rho_{\text{test}} = \frac{m}{V} = 1{,}47 \; \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \;.$$

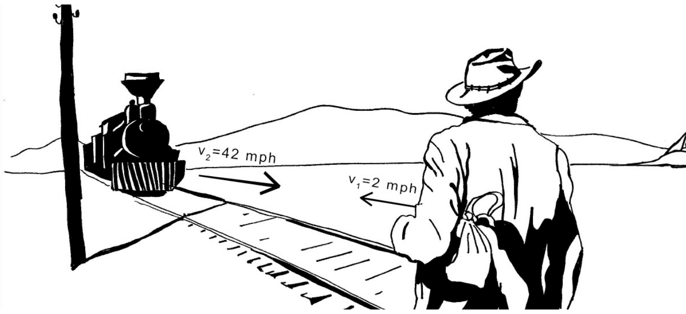
# 4. Feladat

## (a)

**I.** Tekintsünk egy tetszőleges folyamatot $(1' - 2')$, melynek képe $W^* - T$ síkon egyenes!




- Legyen ennek az egyenesnek az egyenlete: $W^* = aT + b$ , ahol $a, b$ paraméterek
- Jelöljünk ki az $1' - 2'$ folyamaton belül két tetszőleges állapotot, legyenek ezek $A$ és $B$





**II.** Vizsgáljuk az $A - B$ folyamat fajhőjét! A fajhő definícióját felírva:

$$c_{AB} = \frac{Q_{AB}}{m\Delta T_{AB}} \;.$$

Az I. Főtétel alapján:

$$c_{AB} = \frac{\Delta E_{b,AB} + W^*_{AB}}{m\Delta T_{AB}} = \frac{c_V m\Delta T_{AB} + (W^*_B - W^*_A)}{m\Delta T_{AB}} \;.$$

Az egyenes egyenletét beírva:

$$c_{AB} = c_V + \frac{(aT_B + b) - (aT_A + b)}{m\Delta T_{AB}} = c_V + \frac{a\Delta T_{AB}}{m\Delta T_{AB}} \;,$$

$$\boxed{c_{AB} = c_V + \frac{a}{m} = \text{konstans}} \;.$$

Ezzel beláttuk, hogy bárhogyan is vesszük fel A és B állapotot az 1'-2' folyamaton belül (melynek képe $W^* - T$ síkon egyenes) az A-B folyamat fajhője állandó. Azaz: bármely ideális gázzal végzett hőtani folyamat, melynek képe $W^* - T$ síkon egyenes, az politróp!

## (b)

**I.** Írjuk fel paraméteresen az egyes részfolyamatok fajhőit!

1.) Az $1 - 2$ folyamat

Az (a) részben kapott összefüggés alapján:

$$c_{12} = c_V + \frac{a_{12}}{m} \;.$$

Az egyenes egyenlete a megadott grafikon alapján: $W^* = 14T - 4400$ [J]. Ezt beírva:

$$c_{12} = c_V + \frac{14}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right] \;. \tag{10}$$

2.) A $2 - 3$ folyamat

A grafikon alapján a folyamat során a gáz nem végez munkát, azaz izochor az állapotváltozás. Ekkor a fajhőt ismerjük:

$$c_{23} = c_V \;. \tag{11}$$

*Megjegyzés:* Ugyanerre az eredményre jutunk, ha ismét az (a) részben kapott összefüggésbe helyettesítünk be. Mivel a $2 - 3$ folyamat képe párhuzamos a vízszintes tengellyel, így $a_{23} = 0$, ezt beírva $c_{23} = c_V$-t kapjuk.

**II.** A kérdéses hányados

$$(10), (11) \quad \Longrightarrow \quad \frac{c_{12}}{c_{23}} = \frac{c_V + \frac{14}{m}}{c_V} = 1 + \frac{\frac{14}{m}}{\frac{f}{2}\frac{R}{M}} \, .$$

Rendezve:

$$\frac{c_{12}}{c_{23}} = 1 + \frac{28}{fRn} \, .$$

Behelyettesítve:

$$\boxed{\frac{c_{12}}{c_{23}} = 1{,}56} \, .$$

# 5. Feladat

## (a)

Az elrendezés szimmetriájából adódóan a vezeték belsejében lévő töltéssűrűség és áramsűrűség egyedül a tengelytől való $r$ távolságtól függhet. A mágneses mező meghatározására a hengerszimmetrikus elrendezés miatt jól alkalmazható az Ampère-féle gerjesztési törvény egy a vezetékkel koncentrikus körre:

$$\sum_{\text{kõr}} \boldsymbol{B} \Delta \boldsymbol{r} = \mu_0 \sum I \, ,$$

$$B(r) \cdot 2r\pi = \mu_0 \sum_{r'=0}^{r} j(r') 2r'\pi \Delta r' \, . \tag{12}$$

Hasonlóan a radiális irányú elektromos térerősség meghatározására a Gauss-tétel egy, a vezetékével egybeeső tengelyű hengerfelületre:

$$\sum_{\text{henger}} \boldsymbol{E} \Delta \boldsymbol{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q \, ,$$

$$E_r(r) \cdot 2r\pi\ell = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{r'=0}^{r} \varrho(r') 2r'\pi\ell \Delta r' + \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho_0 r^2 \pi\ell \, . \tag{13}$$

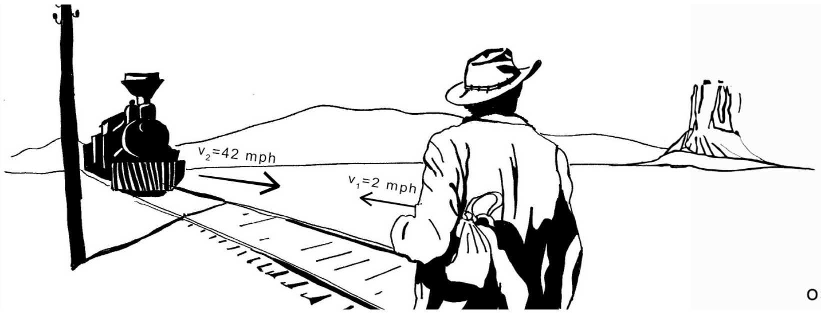
A vizsgált modell szerint a mozgó töltéshordozók mindenhol $v$ sebességgel haladnak, így teljesül, hogy $j(r) = \varrho(r)v$. Ez alapján az (12) és (13) egyenletekből:

$$B(r) \cdot 2r\pi = \mu_0 \varepsilon_0 v \left( E_r(r) 2r\pi - \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho_0 r^2 \pi \right) \, ,$$

$$B(r) = \mu_0 \varepsilon_0 v \left( E_r(r) - \frac{1}{2\varepsilon_0} \varrho_0 r \right) \, .$$

Annak feltétele, hogy a töltéshordozók ne mozduljanak el radiális irányba a stacionárius állapot beállta után az, hogy a rájuk ható elektromos és mágneses erők sugárirányban kiegyenlítsék egymást:

$$\boldsymbol{e}_r \cdot (q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0 \, .$$






Mivel $\boldsymbol{v}$ tengelyirányú, $\boldsymbol{B}$ pedig arra merőleges, ez egyszerűbb alakra hozható:

$$E_r(r) - vB(r) = 0\,. \tag{14}$$

Ezt korábbi egyenletünkbe beírva:

$$E_r(r) = \mu_0\varepsilon_0 v^2\left(E_r(r) - \frac{1}{2\varepsilon_0}\varrho_0 r\right)\,.$$

Használjuk fel, hogy $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, ahol $c$ a vákuumbeli fénysebesség:

$$E_r(r) = -\frac{\varrho_0 v^2 r}{2\varepsilon_0\left(c^2 - v^2\right)}\,.$$

Ez egy egyenletesen töltött rúd terének felel meg, melynek töltéssűrűsége: $\varrho_{\text{teljes}} = -\varrho_0 v^2/\left(c^2 - v^2\right)$. Ez tehát a vezetékben lévő teljes töltéssűrűség, amely a mozgó töltéshordozók $\varrho(r)$ és a rácsionok $\varrho_0$ töltéssűrűségeinek összege. Ezáltal $\varrho = -\varrho_0 c^2/(c^2 - v^2)$. A vezetéknek teljes keresztmetszetében semlegesnek kell lennie, így:

$$\varrho R'^2\pi + \varrho_0 R^2\pi = -\frac{\varrho_0 c^2}{c^2 - v^2}R'^2\pi + \varrho_0 R^2\pi = 0 \quad\Longrightarrow\quad R' = R\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{15}$$

A mozgó töltések tehát ezen a sugáron belül fognak elhelyezkedni. A teljes töltéseloszlás tehát:

$$\boxed{\varrho_{\text{teljes}} = \begin{cases} -\varrho_0\frac{v^2}{c^2 - v^2}, & r < R' \\ \varrho_0, & R' < r < R \end{cases}}\,. \tag{16}$$

## (b)

A feladat szövege szerint reális fémek esetén $v \approx 10^{-4}$ m/s, továbbá a vákuumbeli fénysebesség $c = 3\cdot 10^8$ m/s. Látható, hogy $v \ll c$, így a (15) és (16) egyenletek átalakíthatók:

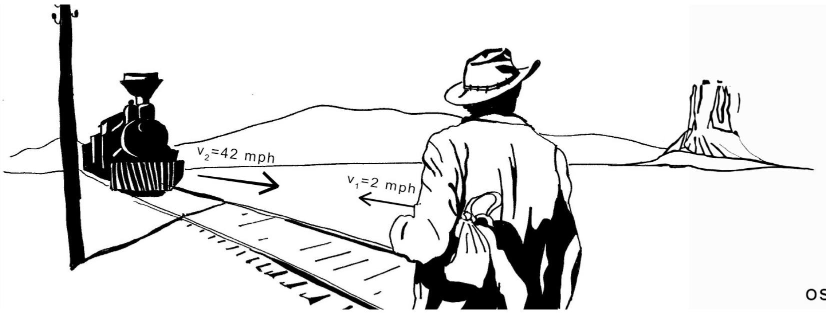
$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2} \quad\Longrightarrow\quad R' = R\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)\,,$$

$$\frac{v^2}{c^2 - v^2} \approx \frac{v^2}{c^2} \quad\Longrightarrow\quad \varrho = \begin{cases} -\varrho_0\frac{v^2}{c^2}, & r < R' \\ \varrho_0, & R' < r < R \end{cases}\,.$$

A pontos értékek alapján látható, hogy $v^2/c^2 \approx 10^{-23}$, ami extrém kicsi, így lényegében:

$$R \approx R' \quad\Longrightarrow\quad \varrho(r) = 0\,.$$

A konstans sűrűségű töltéshordozók modellje így reális esetben jó közelítést ad.






## Megjegyzések

1. A számolás során nem használtuk ki, hogy a fémen belül mozgó részecskék negatív töltésűek. Tekinthetjük úgy, hogy a megadott $\varrho_0$ töltéssűrűség magában tartalmazza a pozitív előjelet, hiszen ez a rácsionok töltéséből fakad. Ugyanakkor negatív $\varrho_0$ esetén is ugyanezek az eredmények adódnak (ez a klasszikus megközelítés, mikor pozitív töltéshordozók szállítják az áramot).

2. A feladatban egy végtelen hosszú, idealizált vezetékkel számoltunk. Pontosabb eredményt kapnánk, ha véges hosszú, esetleg görbe vezetéket vizsgálnánk. Ha azonban a vezetési jelenségeket és az elektronok közti kölcsönhatást igazán pontosan szeretnénk leírni, akkor ahhoz már kvantummechanikai és szilárdtestfizikai számítások szükségesek.

3. A feladat szövegében szerepel, hogy „a teljes vezeték elektromosan semleges”. Ez a megfogalmazás kissé pontatlan, kétféleképpen is értelmezhető.

   Az egyik értelmezés, amely a fent ismertetett megoldásban is szerepel, hogy a vezeték a laborrendszerből szemlélve semleges.

   A másik értelmezés, hogy a vezeték ugyanannyi negatív és pozitív töltést tartalmaz, ekkor azonban a relativisztikus effektusokból fakadóan a laborból szemlélve a vezeték már nem lesz semleges. A mozgó töltések laborban mért $\varrho$ sűrűségéhez ekkor tartozik egy nyugalmi töltéssűrűség, amelyet abban az esetben mérhetünk meg, mikor a vezetékre még nem kapcsoltunk feszültséget. Ezek kapcsolata:

$$\varrho_{\text{nyugalmi}} = \varrho\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,.$$

   Ha azt követeljük meg, hogy a nyugalmi össztöltés legyen nulla, akkor $R'$-re az előzőektől eltérő értéket kapunk:

$$R' = R\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/4}.$$

   Mivel a feladat megfogalmazása ebben a tekintetben nem volt tökéletesen precíz, mindkét lehetőséget elfogadtuk.