XIV. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA

megoldások

Helyi forduló:
2020. november 20.

E

kategória

9-12.
osztályosok

E1. Albrecht állandó sebességgel vezet az autópályán kocsijával. Mivel nagyon hosszú az út, a kocsiban mellette ülő Marvin unalmában elhatározta, hogy meghatározza az autó sebességét. Noha kicsit figyelmetlen volt, azt megjegyezte, hogy délben az XY-os kilométerkő mellett haladtak el (itt X és Y számjegyek), míg 12 óra 42 perckor az YX-es, 13 órakor pedig az X0Y-os kilométerkő mellett. Milyen következtetésre jutott Marvin, mekkora az autó sebessége?

1. Megoldás: Tudjuk, hogy $XY - YX$ kilométer megtételéhez 42 percre volt szüksége az autónak, és további 18 percre $X0Y - YX$ kilométer megtételéhez. Felhasználva, hogy tízes számrendszerben vagyunk, a kilométerköveken szereplő számokat a következőképpen írhatjuk fel: $XY = 10 \cdot X + Y$, $YX = 10 \cdot Y + X$ és $X0Y = 100 \cdot X + Y$.

Vagyis az első két megfigyelés között megtett út, $(10 \cdot Y + X) - (10 \cdot X + Y) = 9(Y - X)$ és a második és harmadik megfigyelés közt megtett út, $(100 \cdot X + Y) - (10 \cdot Y + X) = 99X - 9Y = 9(11X - Y)$ aránya egymáshoz ugyanaz, mint a 42 és a 18 aránya, ami $7 : 3$. Leoszthatunk 9-cel, vagyis $Y - X$ és $11X - Y$ aránya $7 : 3$. Mivel X és Y is számjegyek, ezért $Y - X$ nem lehet nagyobb, mint 9. Emiatt az egyetlen $7 : 3$ arányú számpár, ami szóba jöhet, a 7 és a 3. Tehát

$$Y - X = 7$$

$$11X - Y = 3$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy $10X = 10$, vagyis $X = 1$ és $Y = 8$. Ekkor az autó 42 perc alatt $81 - 18 = 63$ kilométert tett meg, vagyis sebessége 90 kilométer/óra.

2. Megoldás: Rövidebben célhoz érhetünk, ha észrevesszük, hogy az autó 12 és 13 óra között összesen $X0Y - XY = 90 \cdot X$ kilométert tett meg. Azonban X értéke csak 1 lehet, hiszen az első két kilométerkő között több idő telt el, mint a második és harmadik között, vagyis nagyobb a távolságuk. Ha ugyanis X legalább 2 lenne, akkor a második és harmadik távolsága legalább 100 km, míg az első és második távolsága legfeljebb 90 km lenne, ami nem lehetséges. Tehát az autó 12 és 13 óra között, 1 óra alatt 90 km-t tett meg, vagyis a sebessége 90 kilométer/óra.

E2. Nagyi 18 cm × 36 cm-es téglalap alakú tortájának a szélén lévő csokimáz a legfinomabb része. Ezért három unokája úgy szeretne osztozkodni, hogy mindenkinek ugyanakkora (területű) torta jusson, de a széléből (kerületéből) is ugyanannyit kapjon mindenki.

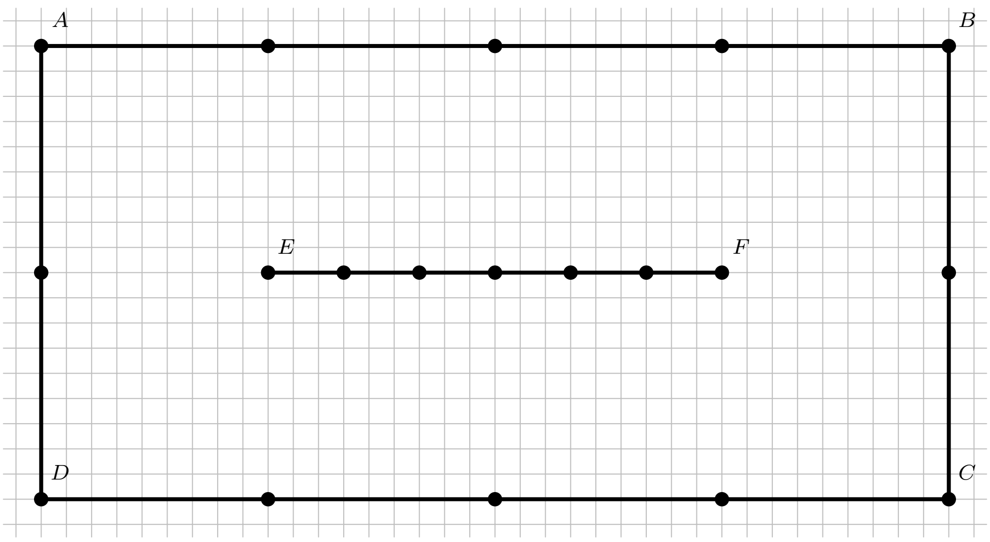
a) Fel tudják-e így vágni a tortát 3 konvex darabra?

b) Nagyi következő tortájából már az egész család szeretne enni, ezért 6 egyenlő területű és ugyanannyi csokimázt tartalmazó (konvex) szeletre kell felvágniuk. Ezt meg tudják tenni?

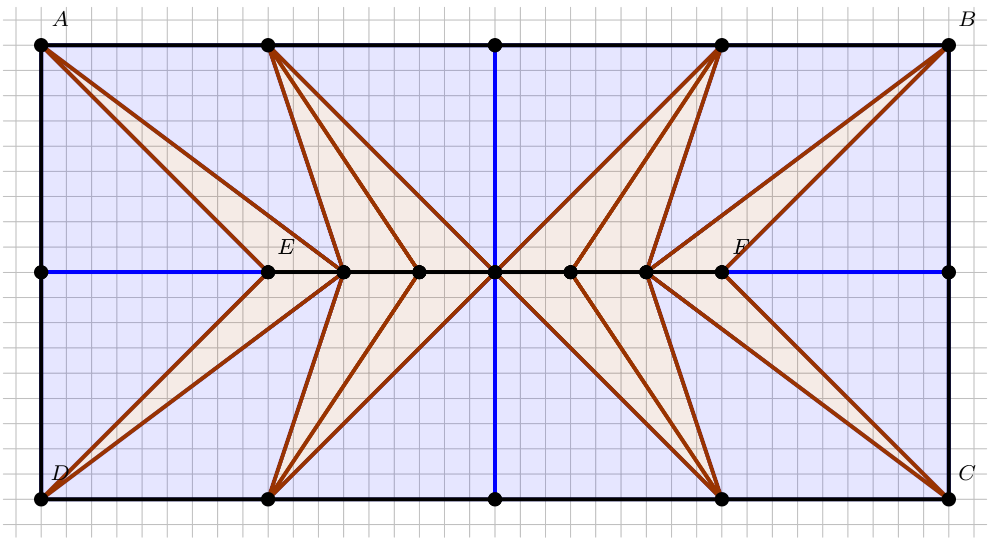
c) Hamarosan az egész szomszédságban elterjedt nagyi tortájának híre. Fel tudják szeletelni a tortát a fenti szabályok szerint, ha 12 ember szeretne belőle enni?

1. Megoldás: Először mutatunk a **c)** részre egy megoldást, amiből kaphatunk az **a)** -ra és a **b)** -re is egy-egy új megoldást.

Vegyük fel az E pontot úgy, hogy $6-6$ cm-re legyen az AB, a CD és az AD oldalaktól. Hasonlóan az F pedig az AB, a CD és a BC oldalaktól legyen $6-6$ cm-re. Osszuk fel továbbá a kerületet 12 egyenlő részre, az EF szakaszt pedig 6 egyenlő részre:



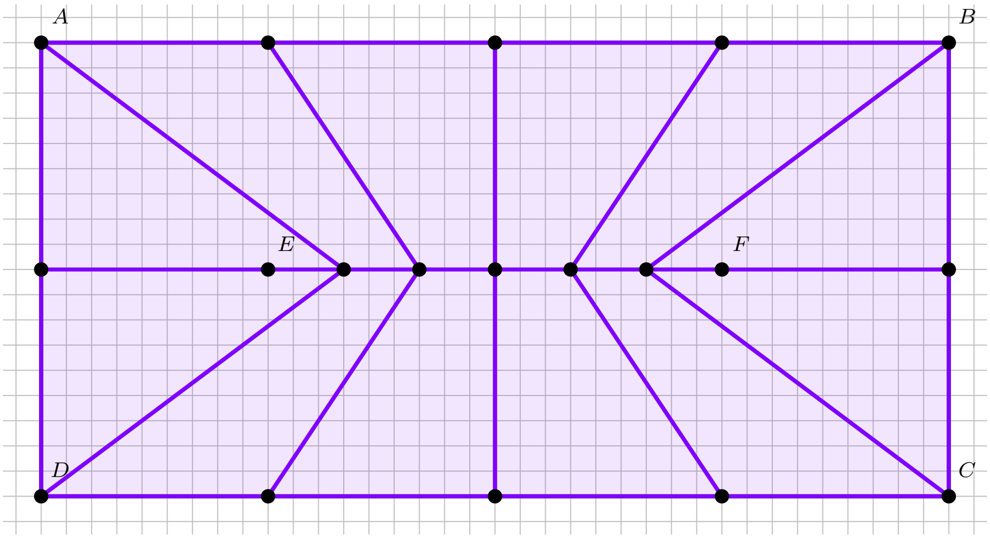
Most pedig alakítsunk ki háromszögeket:



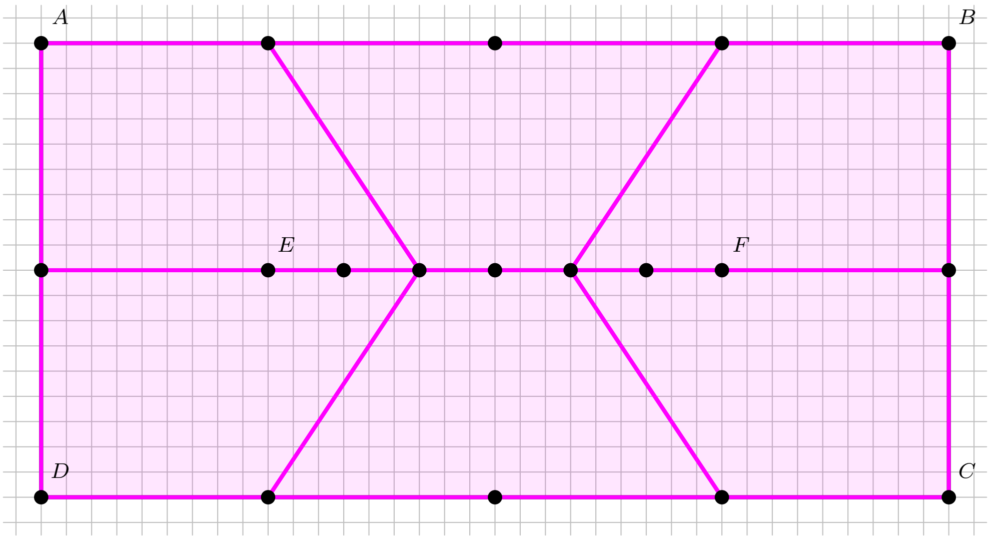
Az összes kék háromszögnek 9 cm az egyik oldala, ami ráadásul a torta széle. Az ehhez tartozó magasság pedig mindig 6 cm, mert így vettük fel az EF szakaszt. Vagyis a kék háromszögek területe megegyezik.

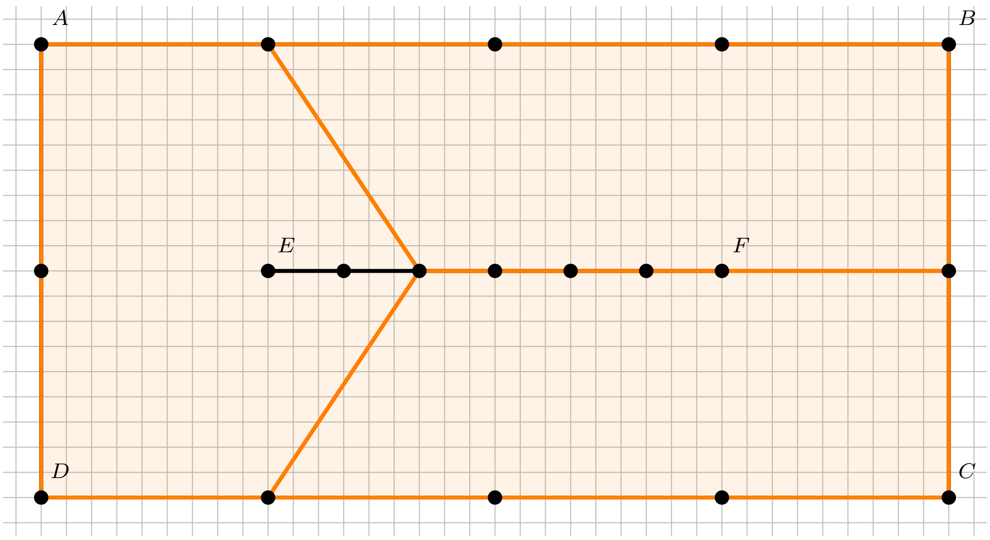
Az összes piros háromszögnek pedig szintén ugyanakkora az egyik oldala, mert az EF-et egyenlő részekre osztottuk, és mindnek 6 cm az ehhez tartozó magassága. Tehát a piros háromszögek területe is megegyezik.

Ha mindenki kap egy kéket meg egy pirosat, azzal tehát egyforma területű tortát kapnak, és a csokimázból is egyforma mennyiség jut:

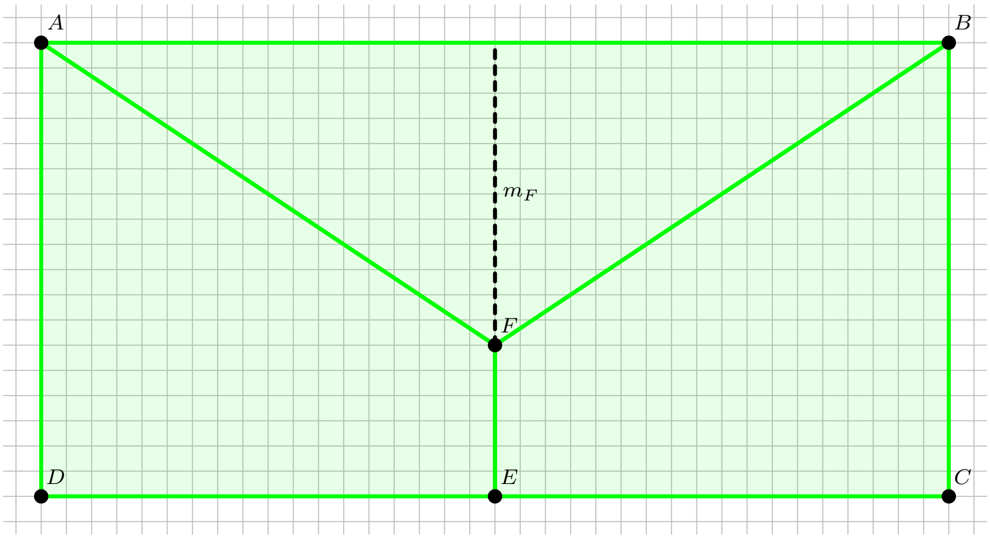


Ha pedig 2-2 kék és piros, illetve 4-4 kék és piros részt kapnak, akkor a **b)** , illetve **a)** részekre kapunk megoldást:



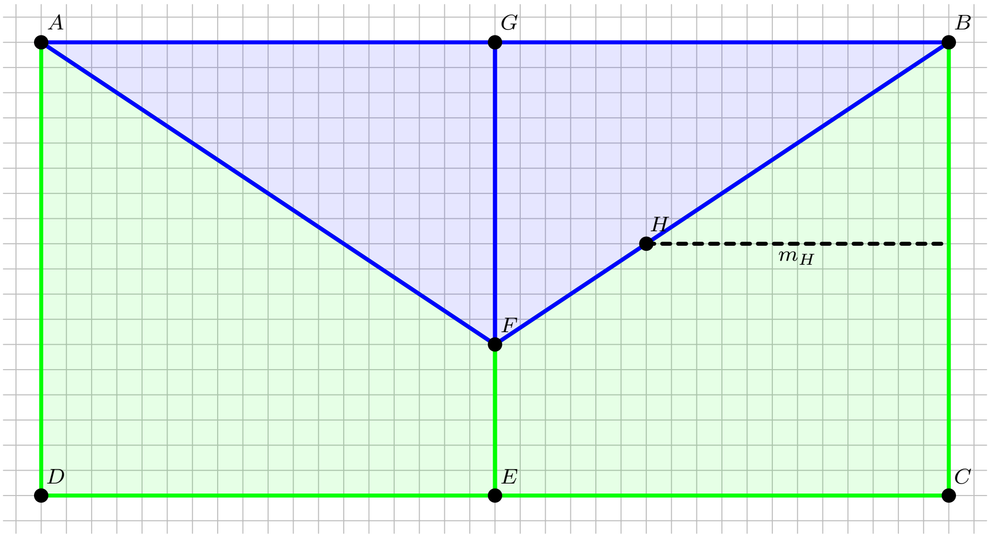


2. Megoldás: a) A kerület összesen $2(18+36) = 108$ cm hosszú, vagyis mindenkinek ennek a harmada kell, hogy jusson, azaz 36 cm, ami pont a hosszabbik oldal hossza. Jelöljük ki egy hosszabb oldal két csúcsát (A, B) és a velük szemben lévő oldal felezőpontját (E) – ezek épp három egyforma részre osztják a kerületet. Kerssünk hozzájuk egy F pontot a téglalap belsejében, mellyel összekötve a területet is 3 egyforma részre fogjuk vágni:



Hogy a két oldalsó terület egyforma legyen, a hosszabbik oldal felezőmerőlegesén keressük az F pontot. Mivel az ABF háromszög területe a harmada kell, hogy legyen a tortának, azaz $18 \cdot 36/3 = 216\text{ cm}^2$, és ismerjük az AB hosszát, így az ehhez tartozó magasságot meg tudjuk határozni: $m_F = \frac{2T_{ABF}}{AB} = \frac{2 \cdot 216}{36} = 12$ cm, másképp fogalmazva $EF = 18 - 12 = 6$ cm.

b) Ezután mindhárom részt el tudjuk felezni jól. Az ABF-nél könnyű a dolgunk, szimmetria miatt az FG felezni fogja mind a területet, mind a téglalap kerületét:

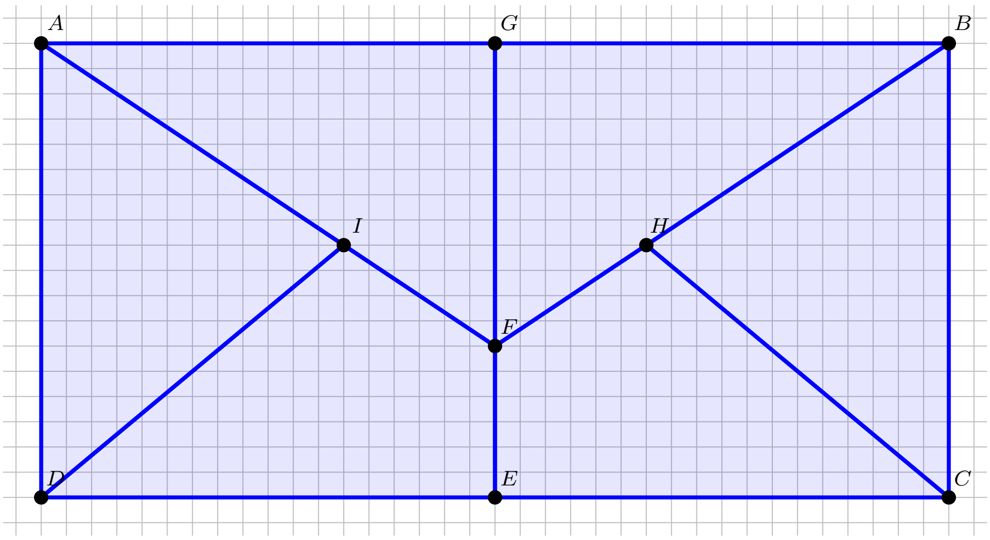


A $BCEF$ négyszög elfelezéséhez egyfelől a C-n keresztül kell vágni (hogy a csokimázból $18-18$ cm jusson), már csak az a kérdés, hogy a BF szakaszon hol kell felvenni a H pontot, hogy a CH a területet is felezze.

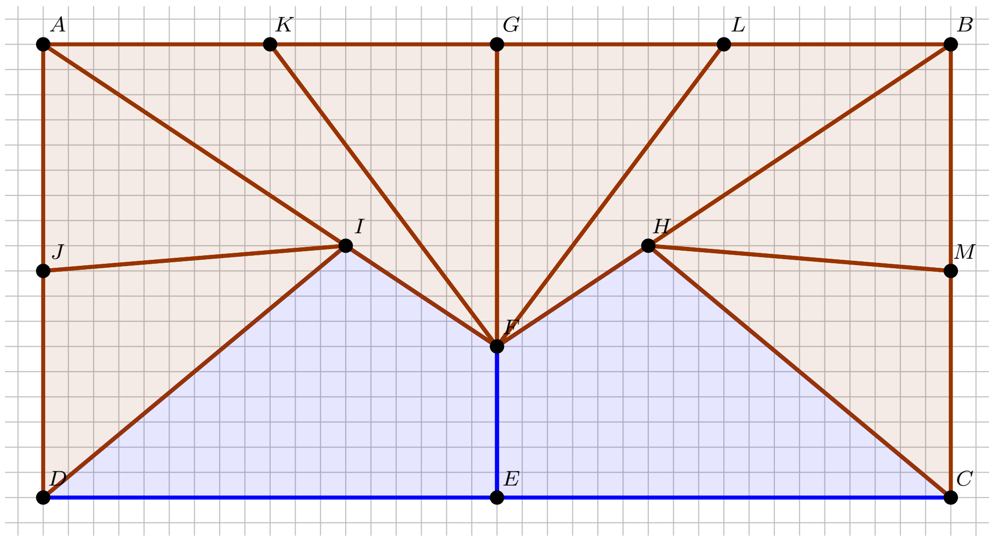
Ezt megint könnyen meg fogjuk tudni határozni, hiszen a HBC területe a téglalap hatoda kell (108 cm^2), hogy legyen, és a BC alapot ismerjük (18 cm), vagyis a hozzá tartozó magasságot ki tudjuk számolni: $m_H = \frac{2T_{HBC}}{BC} = \frac{2\cdot 108}{18} = 12$ cm.

Emiatt egyébként H épp az FB F-hez közelebbi harmadolópontja lesz, így azt is megkaphatjuk, hogy az AB oldaltól $\frac{2}{3}FG = 8$ cm-re van.

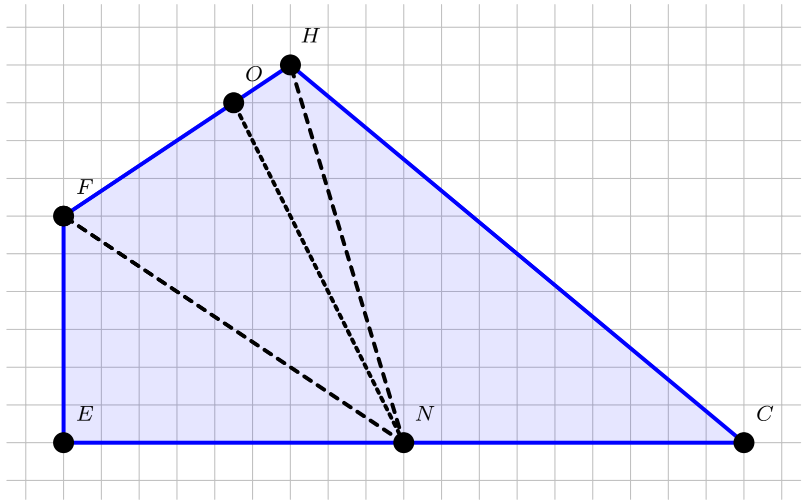
Szimmetrikusan, az $ADEF$ négyszöget a DI-vel tudjuk jól kettévágni:



c) Ismét ezeket a részeket fogjuk jól elfelezni. A DIA, AFG, GFB, BHC háromszögekkel könnyű dolgunk van. Ha behúzzuk az IJ, FK, FL, HM súlyvonalakat, az pont felezi a háromszögek területét, és a szemközti oldalakat (vagyis a csokimázt) is:



Foglalkozzunk már csak a $CEFH$ négyszöggel. Ha ezt megoldjuk, szimmetrikusan működni fog a $DEFI$-re is. Legyen az EC felezőpontja N, és keressük azt a O pontot, amivel az NO épp felezni tudja a területet:



Az NEF és NHC háromszögek területét ki tudjuk számolni, és azt látjuk majd, hogy mindkettő kisebb, mint 54 cm^2, és így az O pontnak valahol az FH szakaszon kell lennie – ahogy az ábrán látható. $T_{NEF} = \frac{NE \cdot EF}{2} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27\ \text{cm}^2$.

NHC területének meghatározásához idézzük fel, hogy H 8 cm-re volt AB-től, ami azt jelenti, hogy 10 cm-re van EC-től. Vagyis $T_{NHC} = \frac{NC \cdot 10}{2} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45\ \text{cm}^2$.

Ez alapján az O pontot úgy kell választani, hogy $T_{OHN} = 54 - 45 = 9\ \text{cm}^2$, és $T_{OHF} = 54 - 27 = 27\ \text{cm}^2$ legyen. A két terület aránya éppen $1:3$, vagyis ha O-t a HF H-hoz közelebbi negyedelőpontjának választjuk, akkor a két háromszögben az N-hez tartozó magasság ugyanakkora, a két alap meg épp $1:3$ arányban van, tehát a területek is így fognak aránylani egymáshoz.

Megjegyzés: Igazából nem kell pontosan meghatározni, hogy hol van az O pont, az is elég, ha bebizonyítjuk, hogy *létezik* egy megfelelő pont.

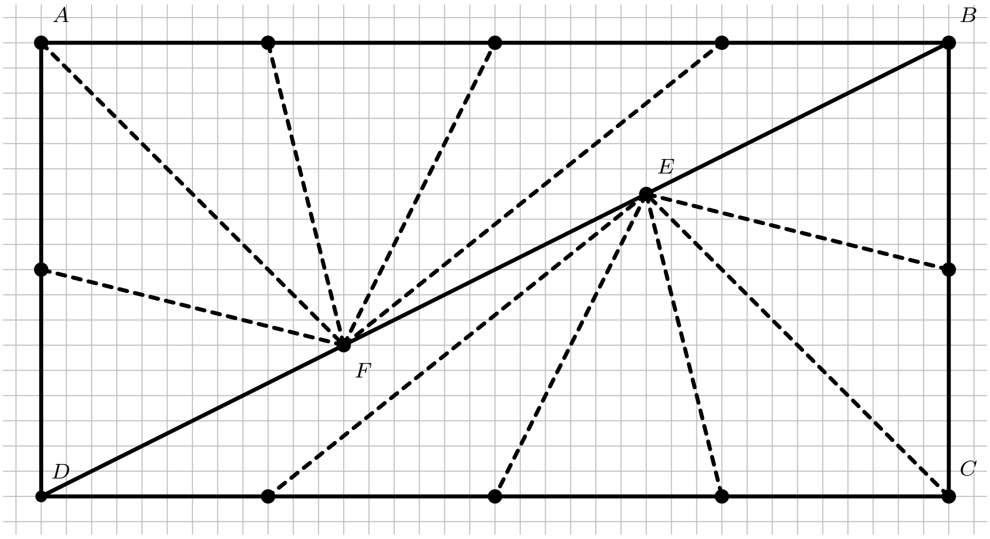
Képzeletben illesszük a késünket az NE félegyenesre, majd kezdjük el forgatni óramutató járásával megegyező irányba úgy, hogy végig az N-ben van az egyik vége. (Vagyis az ábrán lévő szakaszokon például NE, NF, NO, NH, NC sorrendben mennénk végig.)

Ezzel kezdetben az egyik terület 0, a másik az egész (108 cm^2), és ahogy forgatjuk, folyamatosan nő az előbbi terület, és csökken a másik. A végén pedig épp az első terület lesz az egész, és a második 0. Mivel folytonosan változott a terület, valahol kellett lennie egy állásnak, amikor épp fele-fele arányban vágunk.

Ez a megoldás a folytonosság gondolatát használja, de mint láttuk, enélkül is kijön a feladat.

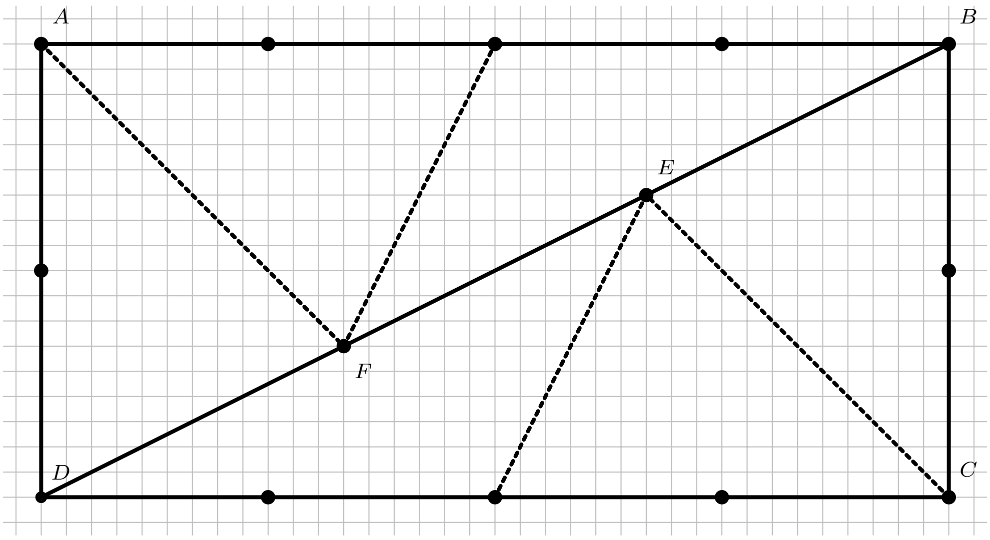
3. Megoldás: Megint a **c)** -re adunk először egy felosztást. Most vegyük fel az E és F pontot a BD átlón úgy, hogy egyforma távol legyenek a BC és CD, illetve DA és AB oldalaktól. Másképp fogalmazva az E a BCD szögfelezőjén, F a DAB szögfelezőjén lesz.

Megint osszuk fel 12 egyforma részre a kerületet, és a BD átló feletti osztópontokat kössük össze F-fel, az az alattiakat pedig E-vel:



Az így kapott háromszögeknek a téglalap határára eső oldala azonos hosszú (vagyis egyforma csokimázat kapnak), és az ehhez tartozó magasság is egyforma lesz, hiszen így vettük fel az E és F pontokat. Tehát ez egy jó felosztás.

Ha csak minden másodikat kötünk össze, akkor pedig a **b)** részre kapunk így egy újabb megoldást:



Érdekes meggondolni, hogy ezek ügyes összevonásával már nem kapunk megoldást az **a)** részre, mert az egyik alakzat mindig konkáv lesz.

E3. Egy kortárs művészeti múzeum alaprajza (nem feltételenül konvex) sokszög, a falai tömör falak. A múzeumot őrző őrnek két kedvenc helye van (A és B pont), ugyanis mindkét helyről be tudja látni a múzeum teljes területét. Igaz-e, hogy ekkor AB szakasz tetszőleges pontjából is belátható az egész múzeum?

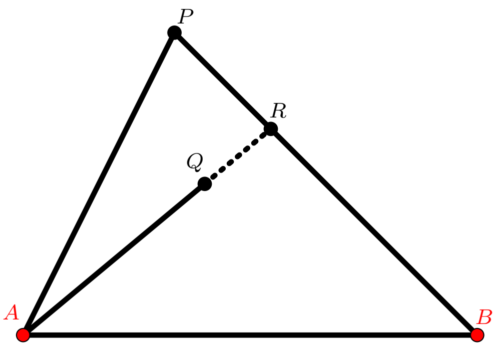
Megoldás:

Vegyük a múzeumnak egy tetszőleges P pontját. Azt fogjuk belátni, hogy az ABP háromszög belsejének és határának minden pontja a múzeum egy pontja.

Ha A (illetve B) pontból látható a múzeum egy X pontja, akkor a teljes AX (illetve BX) szakasz is a múzeum része, mert ha lenne egy Y pont az AX szakaszon, ami nem a múzeum része, akkor A pontból nem lenne belátható az X pont.

Ilyen módon a teljes AB, AP, BP szakasz (azaz az ABP háromszög határa) is a múzeum része.

Lássuk be, hogy ABP háromszögnek minden Q belső pontja a múzeum egy pontja. Az AQ egyenes és BP szakasz metszéspontja legyen R. Mivel R pont a múzeum egy pontja (az ABP háromszög határán van), ezért R látható A-ból, így a teljes AR szakasz is a múzeum része, tehát Q pont is a múzeum része.



Ezzel beláttuk, hogy az ABP háromszög minden belső és határpontja is a múzeum egy pontja. Ebből következik, hogy tetszőleges AB szakaszon lévő C pontból látható a P pont, hiszen CP szakasz a múzeum egy része.

Ez elmondható minden P pontra, ahol P pont a múzeum egy pontja, tehát az AB szakasz tetszőleges pontjából belátható az egész múzeum.

E4. Határozzuk meg az összes olyan a, b, c pozitív egészekből álló számhármast, amelyekre teljesül, hogy
a) $[a, b] + [a, c] + [b, c] = [a, b, c]$.
b) $[a, b] + [a, c] + [b, c] = [a, b, c] + (a, b, c)$.
Megjegyzés: Itt $[x, y]$ jelöli az x és y pozitív egészek legkisebb közös többszörösét, (x, y) pedig a legnagyobb közös osztójukat.

1. Megoldás: a) Vegyük észre, hogy ha p^k $(p, k \in \mathbb{Z}^+)$ egy olyan prímhatvány, amely osztja mindhárom számot, akkor p^k-nal osztva a számokat, továbbra is igaz marad az egyenlőség, mivel az összes tag pontosan p^k-adrészére csökken. Ha ezt megtesszük az eredeti $d = (a, b, c)$ legnagyobb közös osztó kanonikus alakjában szereplő mindegyik prímhatvánnyal, akkor a kapott egyenletben $(a, b, c) = 1$ teljesülni fog. Emiatt az eredeti feladatnak akkor és csak akkor létezik megoldása, ha a leosztás után kapott egyenletnek is létezik megoldása. A továbbiakban csak az ilyen $((a, b, c) = 1)$ egyenletek megoldásait keressük.

Tekintsünk most egy p prímet, ami osztja a, b és c közül legalább az egyiket. Az egyenlet szimmetrikus, ezért a változók szerepe felcserélhető, és így feltehetjük, hogy p osztja a-t. Ekkor p osztja $[a, b]$-t, $[a, c]$-t és $[a, b, c]$-t. Ebből következik, hogy osztani fogja $[b, c]$-t is, vagyis a b és c közül az egyiket. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy b-t osztja. (Ha mindkettőt osztaná, akkor $(a, b, c) = 1$ nem lenne igaz.) Vagyis bármely prímtényező pontosan két változónak osztója.

Sőt, az is igaz, hogy a p prím a-ban és b-ben azonos hatványon szerepel. Ezt indirekten bizonyítjuk. Szerepeljen p az a-ban k-adik, b-ben l-edik hatványon, és legyen $k > l$. Ekkor p $[a, b]$-ben, $[a, c]$-ben és $[a, b, c]$-ben is k-adik hatványon szerepel, vagyis $[b, c]$-ben is k-adik hatványon kellene szerepelnie. Ez lehetetlen, mivel $p \nmid c$, és p a b változóban is kisebb, mint k-adik hatványon szerepel. Vagyis minden prímtényező pontosan két változó prímtényezős felbontásában szerepel, méghozzá ugyanannyiadik hatványon.

Ha az $[a, b, c]$-ben szereplő prímeket csoportosítjuk aszerint, hogy melyik két-két változót osztják, fel tudjuk írni a számokat a következő alakban: $a = de$, $b = ef$, illetve $c = fd$, ahol d, e és f páronként relatív prím pozitív egészek. (Például e azon prímhatványok szorzata, amelyek pontosan a-t és b-t osztják.) Ekkor $[a, b] + [a, c] + [b, c] = def + def + def = 3def$, és $[a, b, c] = def$. Ez viszont lehetetlen, mivel d, e és f pozitívak. Tehát nincsenek megfelelő a, b, c számok.

b) Vegyük észre, hogy ha egy p prímnek egy pozitív egész kitevőjű hatványa mindhárom változót osztja, akkor az **a)** részhez hasonlóan itt is le tudunk osztani vele, és igaz marad az egyenlőség (mind a legnagyobb közös osztóban, mind a legkisebb közös többszörösökben a definícióik szerint ugyanannyival csökken p kitevője). Ebből következően itt is eloszthatjuk mindhárom változót $d = (a, b, c)$-vel, és ezek szintén megoldásai az osztással kapott egyenletnek.

Másrészt, ha az a, b, c számhármas megoldása az egyenletnek, akkor tetszőleges d pozitív egésszel szorozva őket, a kapott számhármas is megoldás (hiszen a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörösök a definíciójukból adódóan most d-szeresére nőnek.) E két megfigyelés alapján az egyenlet összes megoldása előáll az eredeti egyenlet olyan megoldásai többszöröseként, amelyekben $d = (a, b, c) = 1$. Keressük meg tehát az ilyen megoldásokat.

Vegyünk most egy p prímet, ami oszt legalább két számot a háromból. A szimmetria miatt itt is feltehetjük, hogy a-t és b-t osztja. Ekkor p osztani fogja mind a négy, az egyenletben szereplő legkisebb közös többszörös kifejezést, ami miatt $p \mid (a, b, c)$ is teljesül. Viszont $(a, b, c) = 1$ és $p > 2$, ezért ez nem lehetséges. Tehát bármely prím csak az egyik számot oszthatja, azaz a három szám páronként relatív prím egymáshoz. Ezzel az egyenlőség ilyen alakúvá válik: $ab + ac + bc = abc + 1$.

A szimmetria miatt most úgy osszuk ki a változók szerepeit, hogy $a \leq b \leq c$.

Bontsunk esetekre a lehetséges értékei szerint:

- Ha $a = 1$, akkor $b + c + bc = bc + 1$, vagyis $b + c = 1$, ami nem lehetséges.
- Ha $a \geq 3$, akkor $ab + ac + bc \leq \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3} + \frac{abc}{3} < abc + 1$, ami szintén lehetetlen.

- Végezetül, ha $a = 2$, akkor $2b + 2c + bc = 2bc + 1$, ami átrendezve $bc - 2b - 2c + 1 = 0$, azaz $(b-2)(c-2) = 3$. Mivel b és c pozitív egészek, egyedül az $a = 2$, $b = 3$ és $c = 5$ lehet az egyenlet megoldása, ha $(a, b, c) = 1$, és ez valóban jó megoldás.

Ez alapján a megoldások pontosan azok az a, b, c számhármasok, amelyekhez létezik olyan d pozitív egész, hogy $a = 2d$, $b = 3d$ és $c = 5d$. Behelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe, látjuk hogy valóban helyes megoldások: $6d + 10d + 15d = 30d + d$.

2. Megoldás: a) Tudjuk, hogy $[a, b] \mid [a, b, c]$, illetve ugyanígy $[b, c]$ és $[c, a]$ is osztja $[a, b, c]$-t. Léteznek tehát olyan p, q, r pozitív egészek, hogy $[a, b, c] = p[a, b] = q[b, c] = r[c, a]$. Osszuk el a feladatbeli egyenletet $[a, b, c]$ $(\neq 0)$-val, így az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

egyenlethez jutunk.

Ennek az egyenletnek a pozitív egészek körében a $(2, 3, 6)$, a $(2, 4, 4)$ és a $(3, 3, 3)$ számhármasok a megoldásai, az elemek tetszőleges permutációival.

Ezeket a megoldásokat például úgy találhatjuk meg, hogy a szimmetria miatt feltesszük, hogy $p \leq q \leq r$, és becsüljük p-t. $p = 1$ nem lehet, mert a bal oldal nagyobb lenne 1-nél. $p > 3$ sem lehet, mivel ekkor a bal oldal legfeljebb $\frac{3}{4}$ lehetne. Ha $p = 3$, akkor a bal oldal csak úgy lehet 1, ha $p = q = r = 3$, ami megoldás. Végül, ha $p = 2$, akkor a megmaradó egyenlet: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$. A nevezők szorzatával visszabővítve, majd rendezve az egyenletet: $(q-2)(r-2) = 4$, amiből még két megoldást kapunk (p, q, r)-re: $(2, 3, 6)$ és $(2, 4, 4)$.

Megfigyelhetjük, hogy ha p, q és r nem páronként relatív prímek, akkor az eredeti feladatnak nem létezhet megoldása. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik olyan 1-nél nagyobb d prím, amely osztója például p-nek és q-nak is. Így egyrészt $d \mid \frac{[a,b,c]}{[a,b]}$ miatt d kitevője a c változó kanonikus alakjában nagyobb, mint a-éban, másrészt $d \mid \frac{[a,b,c]}{[b,c]}$ miatt d kitevője a-ban is nagyobb, mint c-ben. Ez a számelmélet alaptétele miatt ellentmondás.

Ha ezt a megfigyelést alkalmazzuk a kapott számhármasokra, kapjuk, hogy egyik sem adhat megoldást, mivel mindháromban találunk olyan számpárt, amelyeknek a 2 vagy a 3 közös osztója.

b) Induljunk el az **a)** részhez hasonlóan, és mivel $(a, b, c) \mid [a, b, c]$, létezik olyan s pozitív egész, amelyre $[a, b, c] = s(a, b, c)$. Azt is figyeljük meg, hogy (a, b, c) osztja a három változó páronkénti legkisebb közös többszöröseit is (például $(a, b, c) \mid a \mid [a, b]$), tehát p, q és r az s szám osztói (vagyis $[a, b, c] \mid s$). Vigyük át a legnagyobb közös osztót a bal oldalra, majd osszuk el itt is az egyenletet a nemnulla $[a, b, c]$-vel, így a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = 1$$

Mivel az egyenlet továbbra is szimmetrikus a három változóra, feltehetjük, hogy $p \leq q \leq r$, és ugyanazzal a becsléses módszerrel megoldhatjuk, mint az **a)** részben.

Ha $p = 1$, akkor a bal oldal 1-nél nagyobb lenne, mivel $\frac{1}{r} > 0$ és $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{s}$. Ha viszont $p \geq 3$, akkor a bal oldal 1-nél kisebb lenne: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} < 3 \cdot \frac{1}{3} + 0$. Tehát megoldás esetén $p = 2$, és a kapott egyenlet:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$$

Most p-hez hasonlóan becsülhetjük q-t. Ha $q \leq 2$, akkor $\frac{1}{q} + (\frac{1}{r} - \frac{1}{s}) > \frac{1}{2} + 0$ lenne. Ha viszont $q \geq 4$, akkor a bal oldal lenne kisebb: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} < 2 \cdot \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}$. Tehát csak $q = 3$ lehetséges. Beírva az egyenletbe, ezt kapjuk:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{6}$$

Itt egyrészt $r \geq q = 3$, másrészt $r \leq 5$, mivel $r \geq 6$ esetén a bal oldal kisebb lenne $\frac{1}{6}$-nál. Tehát $r \in \{3, 4, 5\}$, és ebből már s is meghatározható. r mindhárom lehetséges értéke olyan megoldást ad, ahol teljesül az $[a, b, c] \mid s$ feltétel is:

$$(p, q, r, s) \in (2; 3; 3; 6), (2; 3; 4; 12), (2; 3; 5; 30)$$

(A $(2; 3; 3; 6)$ *itt értelemszerűen számnégyest jelöl, ezt a legnagyobb közös osztó jelölésétől a pontosvesszőkkel különböztettük meg.)*

Az **a)** részben tett megfigyelés, miszerint p, q és r páronként relatív prímek kell, hogy legyenek, itt is ugyanúgy érvényes, ami alapján a $(2; 3; 3; 6)$ és a $(2; 3; 4; 12)$ számnégyesek egyből kizárhatók. A $(2; 3; 5; 30)$ számnégyes szerint az szükséges, hogy

$$[a, b, c] = 2[a, b] = 3[b, c] = 5[c, a] = 30(a, b, c)$$

teljesüljön.

Ezek alapján c-ben a 2 kitevője éppen 1-gyel nagyobb hatványon szerepel, mint a és b közül abban, amelyikben nagyobb kitevőn szerepel. Emiatt $[a, b, c]$-ben a 2 kitevője legalább 1-gyel nagyobb, mint (a, b, c)-ben. Hasonlóképpen, $[a, b, c]$-ben a 3 és az 5 kitevője is legalább 1-gyel nagyobb, mint a három változó legnagyobb közös osztójában. (a, b, c) minden más prímtényezője is legfeljebb akkora hatványon szerepel benne, mint a legkisebb közös többszörösben, ezért $\frac{[a,b,c]}{(a,b,c)} \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Mivel itt éppen egyenlőségnek kell teljesülnie, ez csak úgy lehet, hogy a-ban és b-ben a 2 kitevője ugyanannyi, és c-ben a 2 kitevője éppen 1-gyel nagyobb ennél. Ugyanennek kell teljesülnie a 3 és az 5 kitevőjére is, persze azoknak rendre b-ben, illetve a-ban kell 1-gyel nagyobbnak lenniük a többinél. Ezenkívül még az is szükséges, hogy $[a, b, c]$ összes, a 2-től, 3-tól és 5-től különböző prímtényezője ugyanakkora hatványon szerepeljen (a, b, c)-ben is. Ha d-vel jelöljük (a, b, c)-t, akkor ez pontosan azt jelenti, hogy $(a; b; c) = (5d; 3d; 2d)$, ahol tehát d egy pozitív egész.

Ezek a számhármasok az eredeti egyenletnek valóban megoldásai:

$$[a, b] + [b, c] + [c, a] = (15 + 10 + 6)d = 31d = 30d + d = [a, b, c] + (a, b, c)$$

Nyilvánvalóan tetszőleges pozitív egész d-re, a változók tetszőleges permutálásával megoldást kapunk, és azt is láttuk, hogy nincs más megoldás.

E5. Warmridge városában 21 bandita él, mindegyiküknek van néhány ellensége a többiek közül. Kezdetben mindenkinek van 240 golyója, és minden ellenfelével párbajozik. Minden bandita szétosztja a golyóit egyenletesen az ellenfelei között, azaz minden párbajra ugyanannyi golyót visz, és egy golyót csak egy párbajba visz. Amennyiben a töltényei száma nem osztható az ellenfelei számával, akkor minden párbajra annyit visz, amennyit csak tud, de mindig ugyanannyit, így néhány töltény a végén megmaradhat nála.
A városban korábban betiltották a lövöldözést, ezért egy párbaj során csak összehasonlítják, hogy kinek van több töltény a fegyverében, ezután a seriff elkobozza a győztesnél lévő golyókat, a vesztes pedig tiltakozásul a levegőbe lövi az ő összes töltényét. Legfeljebb hány töltény lehet a seriffnél a leszámolás végén?
Az ellenségesség kölcsönös. Amennyiben ugyanannyi töltény van két párbajozó fegyverében, akkor a seriff attól kobozza el a golyókat, akinek szélesebb a kalapja.
Példa: ha egy banditának 13 ellensége van, akkor minden párbajra 18 golyót visz, és a végén marad nála 6 darab.

1. Megoldás: Ha egy főgonosz van, aki mindenki másnak az ellensége, míg a többiek mind barátságban állnak, akkor összesen 20 párbaj van. A seriff mindegyikben elviszi a győztes összes golyóját, tehát ebben az esetben $20 \cdot 240 = 4800$ töltényt gyűjthet össze a seriff.

Azt állítjuk, hogy ennél több golyó semmi esetben sem lehet a seriffnél a párbajok után. Vegyük azt a banditát, aki a legkevesebb golyót visz a párbajaira, ha több ilyen is van, akkor válasszuk ezek közül azt, akinek a legkeskenyebb a kalapja. Ez a bandita az összes párbaját elveszíti, így a 240 golyójából egy sem kerül a seriffhez. A többi banditának összesen $20 \cdot 240 = 4800$ tölténye van, így ennél több töltényt biztosan nem gyűjthet össze a seriff.

2. Megoldás: Az előző megoldásban megmutattuk, hogy 4800 golyó összegyűjthető. Most lássuk be, hogy ennél több nem. Mivel egy párbaj után legfeljebb 240 golyót kaphat a seriff, ezért 4800-nál csak akkor gyűjthet többet, ha több, mint 20 párbaj van. Mivel minden párbaj után legalább $\frac{240}{20} = 12$ golyó a levegőbe kerül, ezért több mint 240 golyót lőnek el. Mivel összesen 5040 golyó van a banditáknál, így kevesebb, mint 4800 golyó maradhat, ami ellentmond az eredeti feltevésnek.

Megjegyzés: *További kétféle megoldást olvashattok az E+ kategória 2. feladatának mintamegoldásában.*