C1. Sasszem, az indiánfőnök vásárra hajtotta 50 marháját. A vásárban cserekereskedelmet tud folytatni, mégpedig a következő módokon: 5 marháját el tudja cserélni 3 disznóra és 5 kecskére. Ha ad 1 marhát és 1 kecskét, akkor 2 disznót kap, illeve 3 disznóért és 3 kecskéért cserébe 2 marhához juthat.

a) Mivel Sasszem el szeretne kezdeni kecskét és disznót is tenyészteni a marha mellett, ezért úgy szeretne kereskedni, hogy mind a három állatból legalább 20-at vigyen haza. Megteheti ezt?

b) Mutassátok meg, hogy előfordulhat, hogy az indiánfőnök kevesebb mint 15 állattal távozik a vásárról.

Megoldás: a) Sasszem szeretne úgy cserélgetni, hogy 50 marhából indulva mindegyik állatból legalább 20 darab legyen. Erre mutatunk egy lehetőséget. A következő cseréket tudja megtenni:

1. $5M \to 3D + 5K$
2. $1M + 1K \to 2D$
3. $3K + 3D \to 2M$

Először végrehajtja az első cserelehetőséget ötször. Így elcserélt 25 marhát 15 disznóra és 25 kecskére. Ez után szeretne még kapni legalább 5 disznót, ezért a második cserelehetőséggel él háromszor és elcserél 3 marhát és 3 kecskét 6 disznóra. Így lett $15 + 6 = 21$ disznója, $25 - 3 = 22$ kecskéje és $50 - 25 - 3 = 22$ marhája. Tehát a cserék után mindegyik állatból legalább 20 darabja lett.

b) Egy olyan cseresorrendet szeretnénk mutatni, ahol a végén Sasszemnek 15-nél kevesebb állata lesz. Erre egy lehetőség:

Először elcseréli az 50 marháját 30 disznóra és 50 kecskére az 1. lehetőséget használva tízszer. Ezután a 3. lehetőséggel él szintén tízszer, így 30 kecskéért és 30 disznóért kap 20 marhát. Így most 20 marhája és 20 kecskéje van. Ezután a 2. lehetőséget használja tízszer, tehát 10 kecskét és 10 marhát elcserél 20 disznóra. Ezután a csere után marhából és kecskéből 10 darabja van, disznóból 20. Majd háromszor elvégezve a 3-ik cserét 16, 11 és 1 darab marad sorban a marhából, disznóból és kecskéből. Az első cserével 3-szor folytatva 1, 20 és 16 állat marad. A haramdikat 5-ször elvégezve már csak 11 marhája, 5 disznója és 1 kecskéje marad. Az első cserét használva még kétszer csak 1 marhája marad $11 - 11$ disznóval és kecskével. Végül a 3. cserét 3-szor elvégzi és 7 marhája, 2 disznója és 2 kecskéje marad. Azaz összesen $7 + 2 + 2 = 11 < 15$ állattal távozik a vásárról.

C2. Ludmilla leírt a füzetébe egy nyolcjegyű pozitív egész A számot, majd az egyik számjegyét törölve egy hétjegyű pozitív egész B számot kapott. Ekkor észrevette, hogy a két szám összege 20210521, amely pont a Dürer-döntő dátuma! Mi lehetett a Ludmilla által először leírt szám?

Megoldás: Vegyük észre, hogy ha A-nak nem az utolsó számjegyét törölte Ludmilla, akkor A és B utolsó számjegye megegyezik, ezért az összegük páros. Azonban 20210521 páratlan, így Ludmilla az utolsó számjegyét törölte A-nak.

Legyen A utolsó számjegye x, ekkor $A = 10 \cdot B + x$, valamint

$$A + B = 20210521$$

$$11 \cdot B + x = 20210521.$$

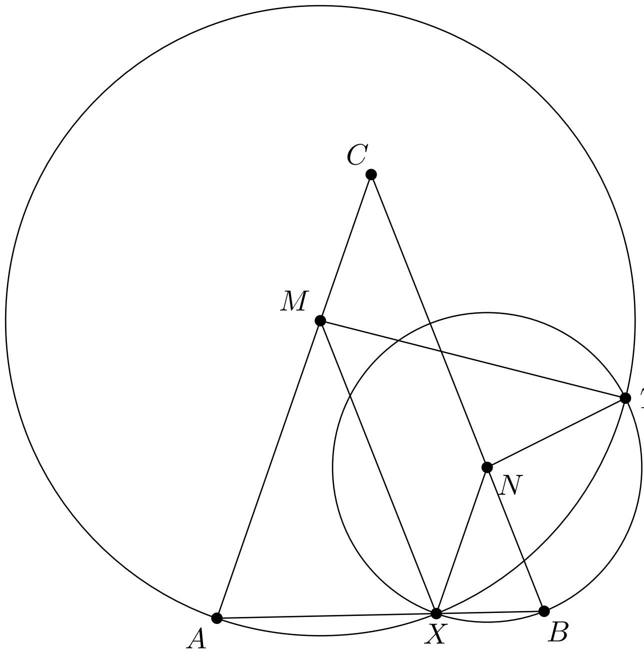
Maradékosan elosztva 11-gyel 20210521-et azt kapjuk, hogy $20210521 = 11 \cdot 1837320 + 1$. Mivel x számjegy, így az az egyetlen lehetőség, hogy $x = 1$ és $B = 1837320$. Ekkor a Ludmilla által először leírt szám az $A = 18373201$.

Ellenőrzés: a 18373201 valóban egy nyolcjegyű szám, és az utolsó számjegyét törölve a hétjegyű 1837320-at kapjuk, valamint $18373201 + 1837320 = 20210521$.

C3. Az ABC egyenlőszárú háromszögben, ahol $AC = BC$, legyen X egy tetszőleges pont az AB szakaszon. A BC-vel párhuzamos X-en áthaladó egyenes messe AC-t N-ben, az AC-vel párhuzamos X-en áthaladó egyenes pedig messe BC-t M-ben. Legyen az N középpontú, NA sugarú, valamint az M középpontú MB sugarú körök X-től különböző metszéspontja T. Igazoljátok, hogy az $NCM\sphericalangle$ és $NTM\sphericalangle$ szögek megegyeznek.

Megoldás: A két kör M-en kívüli metszéspontja X lesz. Az MT és MX szakaszok ugyanolyan hosszúak, hiszen ugyanazon kör sugarai. Ugyanígy $|NX| = |NT|$. Mivel három oldaluk megegyzik, az MNT és az MNX háromszögek egybevágóak, így $MTN\sphericalangle = NXM\sphericalangle$. (Tehát az $MXNT$ négyszög egy deltoid, amely szimmetrikus az MN szakasz egyenesére.)

Tudjuk, hogy NX párhuzamos AC-vel, MX pedig BC-vel, így a $CMXN$ négyszög egy paralelogramma, ebből következően $MCN\sphericalangle = NXM\sphericalangle$, ami viszont egyenlő volt $MTN\sphericalangle$ szöggel. Tehát az $MCN\sphericalangle$ és $MTN\sphericalangle$ szögek nagysága valóban megegyezik.



C4. Hétfőn lesz Nagymama 80. születésnapja, és az egész család felköszönti őt. Erre az alkalomra Nagymama 3 liter almalevet vett, amit az unokái között szeretne egyenlően elosztani, azonban azt nem tudja pontosan, hogy mind a kilenc unokája el fog-e tudni jönni, vagy csak nyolcan lesznek. A szekrényben viszont talál 16 darab poharat, így arra gondol, hogy még a család érkezése előtt kitölti az összes almalevet a 16 pohárba úgy, hogy 8 és 9 unoka részvétele esetén is mindenki ugyanannyi almalevet kapjon, és az összes almalevet megigyák az unokák.
a) Melyik pohárba mennyi almalevet töltsön, ha egy pohárból higiéniai okok miatt legfeljebb egy gyerek ihat, viszont egy gyerek akár több pohárból is ihat?
b) Sajnos mielőtt elkezdte volna kitölteni az almalevet, Nagymama az egyik poharat elejtette, így az a padlóra esett és széttörött. Meg tudja-e oldani a fenti problémát így, hogy csak 15 pohár áll a rendelkezésére?

Megoldás: a) Mutatunk egy lehetséges megoldást 16 pohárral. Nagymama nyolc pohárba töltsön egyenként $\frac{1}{3}$ liter almalevevet, a többi nyolcba pedig egyenként $\frac{3-8/3}{8} = \frac{1}{24}$ liter almalevet. Ha 9 gyerek jön, közülük 8 az első nyolc pohárból kap egyet-egyet, míg a 9. megissza a maradék 8 pohár tartalmát. Így a kilencedik unoka is összesen $8 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{3}$ liter almalevet iszik, pont mint a többiek.
Ha csak nyolc unoka látogatja meg, akkor mind a nyolcan igyanak meg egy nagyobb ($\frac{1}{3}$ literes) és egy kisebb ($\frac{1}{24}$ literes) pohárral. Ezzel mind a nyolcan azonos mennyiségű ($\frac{3}{8}$ liter) almalevet isznak meg, és ebben az esetben sem isznak többen ugyanabból a pohárból.

b) 1. megoldás: Tegyük fel, hogy Nagymama 15 pohárral is meg tudja oldani a problémát. Tudjuk, hogy az összes almalének el kell fogynia, és minden pohárból legfeljebb egy unoka ihat. Ha kilenc unoka érkezik, akkor mindegyik unokának $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ liter almalevet kell innia, nem többet. Ha lenne olyan pohár, amelybe Nagymama több, mint $\frac{1}{3}$ liter gyümölcslevet töltene, akkor a 9 unoka közül amelyikük ebből a pohárból inna, az többet inna a többieknél. Tehát mindegyik pohárba legfeljebb $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ liter almalé kerülhet. Így viszont, amennyiben csak 8 unoka jelenik meg, mindenkinek legalább két-két pohárból kellene innia, hiszen $\frac{1}{3} < \frac{3}{8}$ (minden egyes pohárban kevesebb almalé van, mint amennyit egy-egy unoka ilyenkor meginna). Tehát valóban szükség van 16 pohárra, nem elég 15 darab.

b) 2. megoldás: A megoldás lényegi gondolatát fordítva is megragadhatjuk. Így, hogy csak 15 pohár van, már nyolc unoka esetén is biztosan lesz olyan unoka, aki legfeljebb egy pohárból ihat (különben legalább 16 pohárnak kellene lennie). Ha nyolcan vannak, mindenki $\frac{3}{8}$ almalevet iszik, így egy olyan unoka, aki csak egy pohárból iszik, $\frac{3}{8}$ liter levet tartalmazó poharat kell, hogy kapjon. Ha pedig kilencen látogatják meg Nagymamát, ezt a "nagyobb" poharat senki sem kaphatja meg, mivel az abból ivó unoka többet inna $\frac{1}{3}$ liternél. Ekkor viszont nem tud elfogyni az összes almalé. Tehát nem oldható meg a szétosztás 15 pohárral.

C5. Csongor nagyon unatkozott matekórán, unalmában egy papírra kezdett firkálni. Először leírt egy természetes számot, majd pedig innen növekvő sorban elkezdte írogatni az egész számokat. Már 38 leírt számnál járt, amikor észrevette, hogy egyik számra sem igaz, hogy a számjegyeinek összege osztható 11-gyel.

a) Mutassatok egy számot, amelyet Csongor először leírhatott a papírra.

b) Bizonyítsátok be, hogy akárhonnan kezdi is az írogatást, 39 számot már nem fog tudni így leírni.

Megoldás: a) A Csongor által elsőként leírt természetes szám lehetett például a 999981. A legutolsó, 38. szám ekkor az 1000018. 999981-től 999989-ig a számjegyösszegek 45-től 54-ig terjednek, vagyis a 11-es maradékaik 1-től 9-ig futnak. 999990-től 999999-ig 1-től 10-ig mennek a maradékok, ugyanúgy, ahogyan 1000000-tól 1000009-ig. Végül 1000010-től 1000018-ig 2-től 10-ig terjednek a maradékok. Tehát valóban, a 38 közül semelyik felsorolt szám jegyeinek összege sem osztható 11-gyel, jó a konstrukció.

Az alábbi táblázatban láthatók tömören a felsorolt számok, alattuk pedig a számjegyeik összegének 11-es maradékai:

999981	...	999989	999990	...	999999	1000000	...	1000009	1000010	...	1000018
1	...	9	1	...	10	1	...	10	2	...	10

b) Az első megfigyelésünk a következő: ha Csongor leírt tíz egymás követő természetes számot, amelyek közül a legkisebb 0-ra végződik, akkor ezek csak az egyeseik számában térnek el egymástól. Nevezzünk tíz ilyen számot együttesen egy *tízes csoport*nak. A tízes csoportba eső számok jegyeinek összegei, illetve azok 11-es maradékai is egymást követő számok (ahol a 10-et, mint 11-es maradékot a 0 maradék követi). Ahhoz, hogy ne legyen köztük olyan szám, amelyben a számjegyek összege osztható 11-gyel, az szükséges, hogy a tíz szám jegyösszegeinek 11-es maradékai sorban 1-től 10-ig terjedjenek (például 100-tól 109-ig, vagy 480-tól 489-ig ez teljesül).

A második megfigyelésünk: vizsgáljuk meg általánosan, hogy egy tízes számrendszerbeli természetes szám és a rákövetkező szám jegyei összege között mekkora lehet az eltérés. Ha a kisebb szám pontosan k darab 9-es jegyre végződik, akkor a nála eggyel nagyobb szám pontosan k darab 0-ra fog végződni, és a $(k+1)$-edik legkisebb helyiértékén szereplő számjegy éppen 1-gyel nő ($\overline{\ldots n99\ldots 9} \to \overline{\ldots(n+1)00\ldots 0}$). A számjegyek összege tehát előjelesen $(1-9k)$-val nő. Ez azt is jelenti, hogy ha a rákövetkező számra lépésnél nem történik tízesátlépés, akkor a számjegyösszeg 1-gyel nő meg. Ha történik tízesátlépés, de százasátlépés nem, akkor 8-cal csökken a számjegyek összege.

Ezek után bontsuk két esetre a vizsgálódást:

1. eset: A Csongor által felírt számokban a tízesnél nagyobb helyiértékű jegyek mind megegyeznek (tömören, a felírt számok ugyanabba a *százas csoport*ba esnek). Ha legalább 19 egymást követő számot felírunk, akkor közülük legkésőbb a tizedik 0-ra végződik, jelöljük ezt A-val. A-tól kezdve a felírt számok között tíz egymást követő szám van, amelyek csak az egyeseik számában térnek el egymástól (A, $A+1$, ..., $A+9$). Az első megfigyelésünk alapján a jegyösszegeik 11-es maradékai szükségképpen 1-től 10-ig terjednek.

Nézzük meg az őt megelőző, és az őt követő *tízes csoport*ba eső számokat is. $A-1$ egyetlen 9-esre végződik, így a jegyeinek összege (a második megfigyelésünk alapján) 8-cal nagyobb A jegyei összegénél, tehát $A-1$ jegyei összegének 11-es maradéka $1+8=9$. Ha egyesével lefelé lépegetünk, látjuk, hogy az 1-esre végződő $A-9$-nél éppen 1 a jegyösszeg 11-es maradéka, de $A-10$-ben már 0, itt megáll a felírás. Hasonlóan, $A+10$ a rákövetkező tízes csoport legkisebb száma, amelyben 8-cal kisebb a jegyek összege, mint $A+9$-ben, így $A+10$-ben 2 a jegyek összegének 11-es maradéka. Továbbhaladva, $A+18$-ban 10 ez a maradék, de $A+19$ jegyeinek összege már osztható 11-gyel.

Nézzük meg ugyanezt táblázatos formában is, az alsó sorban a számjegyek összegének 11-es maradékával:

szám	$A-10$	$A-9$	...	$A-1$	A	...	$A+9$	$A+10$	...	$A+18$	$A+19$
maradék	0	1	...	9	1	...	10	2	...	10	0

Látható, hogy ebben az esetben legfeljebb $9+10+9=28$ szám írható fel az egymást követő tízesekből (például 471-től 498-ig a táblázatnak megfelelőek a maradékok).

2. eset: A Csongor által felírt számoknál *százasátlépés* is történik. Most jelöljünk C-vel egy 100-zal osztható számot, amelyet Csongor felírt (egyelőre nem tudjuk, hogy többet is felírhatott-e). Vegyük észre, hogy a $C-1$-gyel végződő, illetve a C-vel kezdődő *százas csoport*ból is legfeljebb 19 szám választható ki.

$C-10$-től $C-1$-ig a számok éppen egy tízes csoportot tesznek ki. Az 1. eset vizsgálata alapján, ha a $(C-10)-(C-1)$ tízes csoport megfelelően felírható, abban $C-10$ jegyei összegének 11-es maradéka 1. Ilyenkor az azt megelőző tízes csoportból legfeljebb legfeljebb 9 további számot választhatunk ki, mivel a $(C-19)-(C-10)$ tízes csoportban a 11-es maradékaik 1-gyel "lejjebb csúsztak" a $(C-9)-(C-1)$ csoport maradékaihoz képest. Hasonlóan, a C-től $C+9$-ig tartó tízes csoportban is 1-től 10-ig mennek a 11-es maradékok, a $(C+10)-(C+19)$ tízesben viszont 2-től 11-ig, tehát a $C+19$ már nem írható fel.

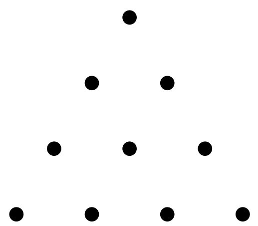
Mivel mindkét szomszédos százas csoportból legfeljebb 19 szám választható ki, összesen legfeljebb 38 számot írhattunk fel ebben az esetben. Mivel az 1. esetben sem írhattunk fel több számot, hanem legfeljebb csak 28-at, látjuk, hogy 38-nál több szám biztosan nem írható fel, ezzel a **b)** feladatrészt megoldottuk. Érdemes azonban innen folytatni a gondolatmenetet, hiszen az **a)** részre akár éppen ezek alapján a megfigyelések alapján adhatunk egy példát.

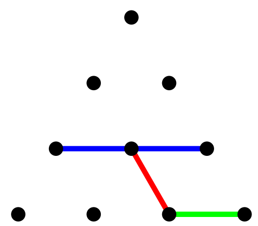
Ahhoz, hogy tényleg fel tudjunk írni 38 számot a feltételeknek megfelelően, az szükséges, hogy a 99-re végződő $C-1$ jegyei összegének a 11-es maradéka 10 legyen, illetve C jegyei összegének 11-es maradéka 1 legyen. Ha ez teljesül, akkor mindegyik maradék megfelelő (de csak ebben az esetben írható fel 38 szám). Nézzük a táblázatot; az alsó sorban továbbra is a felette levő szám jegyei összegének 11-es maradéka szerepel:

szám	$C-19$	...	$C-11$	$C-10$	...	$C-1$	C	...	$C+9$	$C+10$	...	$C+18$
maradék	1	...	9	1	...	10	1	...	10	2	...	10

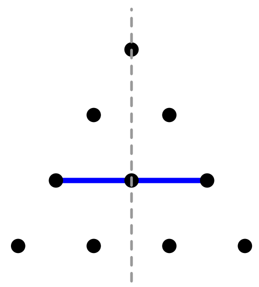
Jelöljük k-val azt, hogy $C-1$ hány darab 9-esre végződik. A **b)** rész elején megfigyeltük, hogy $C-1$ jegyeinek összege $(9k-1)$-gyel nagyobb, mint C jegyeinek összege. Tudjuk, hogy $C-1$ jegyei összegének 11-es maradéka egyrészt 10, másrészt megegyezik $(9k-1)+1=9k$-nak a 11-es maradékával. Találjunk olyan k pozitív egész számot, amelyre $9k$-nak a 11-es maradéka 10. Ha felírjuk a 9 többszöröseit, látjuk, hogy $k=6$ megfelelő $(9k=54=4\cdot 11+10)$. Mivel $6\cdot 9$ tizenegyes maradéka 10, így a 6 darab 9-esből álló 999999 szám megfelelő lesz $C-1$-nek. Ekkor C éppen egymillió, így az ő jegyeinek összege 1, ami szintén stimmel. Így jutottunk el valójában az **a)** részben megtalált megoldáshoz: a legkisebb számnak megfelel a 999981, a Csongor által legutolsóként felírt szám az 1000018, és ellenőrizhetjük, hogy jó a megoldás.

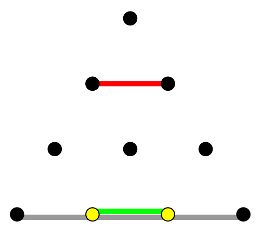
C6. **Játék:** Egy indiánrezervátumban 10 totemoszlopot állítottak fel a bal oldali ábrán látható háromszögrács szerint. Csendes Patak és Vörös Tűz a következő játékot szokták itt játszani: felváltva feszítenek ki köteleket két-két oszlop között, és minden kötél kifeszítésénél figyelnek arra, hogy a kifeszített kötél párhuzamos legyen a nagy háromszög egyik oldalával, illetve a kötél nem haladhat el olyan oszlop mellett, amelyet már egy másik kötél érint. Ezenkívül ha a jelenleg kifeszített kötél helyett annak egy egyenes vonalú meghosszabbítása is kifeszíthető a fenti feltételek mellett, akkor azt kell kifeszíteniük. Az veszít, amelyikőjük már nem tud a szabályoknak megfelelően több kötelet kifeszíteni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni. A jobb oldali ábrán egy lehetséges játék első három lépése látható. Először Csendes Patak kifeszíti a kék kötelet, majd Vörös Tűz a pirosat, aztán Csendes Patak a zöldet.





Megoldás: *Az indiánokat játékosnak, a köteleket szakasznak vagy vonalnak is fogjuk nevezni.* A játékban a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája, ráadásul tetszőleges első lépés után tud nyerni, bármilyen lépéseket is tegyen a második játékos. Mi a kezdő játékosnak azt a nyerő stratégiáját vizsgáljuk meg, amikor két, egymástól kettő távolságra lévő oszlop között feszít ki kötelet, például a bal ábrán látható kéket. (Ha egy másik kettő hosszú kötelet húz be, az ábrát elforgatva ugyanazt az állást kapjuk).





Ezután ha lehet, tükrözi az ellenfele lépéseit a szürke szaggatott vonallal jelölt egyenesre, mint szimmetriatengelyre. Ezt mindig megteheti, amikor az ellenfele nem egy, a jobb oldali ábrán látható szakaszt húz be. Ezek a szakaszok önmaguk tükörképei a tengelyre, ezért ha valamelyik játékos behúzza azokat, a másik már nem húzhatja be a tükörképüket. Ha az ellenfele lépése tehát éppen ilyen vonal (a jobb oldali ábrán látható színes vonalak egyike), akkor a következőképpen válaszjon rá:

- Ha a másik játékos a zöld vagy a szürke kötelet feszíti ki, a kezdő játékos válaszoljon a piros vonallal.
- Ha a másik játékos a piros vonalat húzza be a lépése során, akkor erre a zöld vagy a szürke vonal közül a megfelelően behúzható legyen a válasz. Mivel az ábra minden eddigi lépés után szimmetrikus volt, teljesül, hogy az alsó sor sárga pontokkal jelölt két középső oszlopa közül vagy mindkettőt érinti már kötél, vagy egyiket sem. A lényeg, hogy e két oszlop közé kerüljön kötél (zöld vonal), de ha a kötél meghosszabbítható (szürke vonal), akkor értelemszerűen a három egység hosszú szürke vonalat húzza be.

Amikor a második játékos ezek közül a színes vonalak közül először behúz egyet, akkor az első játékos - a stratégiája alapján - még nem rajzolt be ilyen vonalat, vagyis mindig ki tudja választani a színes vonalak közül azt, amelyikkel válaszolni tud a második játékos lépésére. Ezzel az ábra továbbra is szimmetrikus marad.

Összefoglalva: az első játékos minden lépése után tengelyesen szimmetrikus marad az ábra a szürke szaggatott tengelyre. Amíg van szabad hely, ahová a második játékos behúzhat egy kötelet, a tengelyes szimmetria miatt az első játékosnak is marad szabad hely, tehát az első játékosnak nem fogynak el a lépéslehetőségei. Vagyis ezzel a stratégiával biztosan megnyeri a játékot.