



1. Sasszem, az indiánfőnök vásárra hajtotta 50 marháját. A vásárban cserekereskedelmet tud folytatni, mégpedig a következő módokon: 5 marháját el tudja cserélni 3 disznóra és 5 kecskére. Ha ad 1 marhát és 1 kecskét, akkor 2 disznót kap, illetve 3 disznóért és 3 kecskéért cserébe 2 marhához juthat.

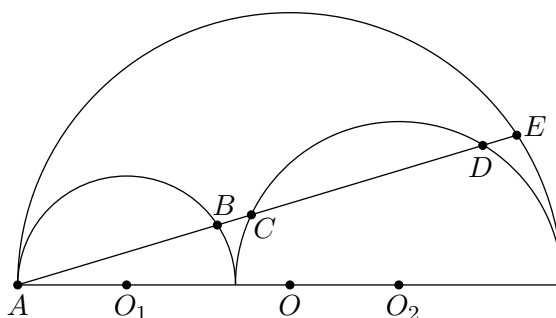
a) Mivel Sasszem el szeretne kezdeni kecskét és disznót is tenyészteni a marha mellett, ezért úgy szeretne kereskedni, hogy mind a három állatból legalább 20-at vigyen haza. Megteheti ezt?

b) Mutassátok meg, hogy előfordulhat, hogy az indiánfőnök kevesebb mint 15 állattal távozik a vásárról.

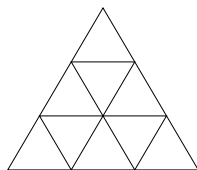
2. Hány megoldása van az $n^3 - 2 = k!$ egyenletnek, ha n és k pozitív egész számok?

Megjegyzés: $k!$ jelöli a k -nál nem nagyobb pozitív egész számok szorzatát.

3. Adott egy O középpontú félkör. A félkör átmérőjének egy tetszőleges belső pontja két részre osztja az átmérőt. A két rész fölé O_1 és O_2 középpontú félköröket rajzolunk az ábra szerint. Az A ponton átmenő e egyenes a félköröket további négy pontban metszi, ezek rendre B , C , D és E . Mutassátok meg, hogy a BC és DE szakaszok egyenlő hosszúak.



4. Az ábrán látható 3 egység oldalú szabályos háromszögrács néhány mezőjét Karcsi pirosra színezte. Ezek után odaadta a rácsot Piroskának, aki további mezőket színezett pirosra a következő módon: ha talált egy 2 egység oldalú részháromszöget, ahol a 4 mezőből 3 mező piros, akkor a negyediket is pirosra színezte. Egészen addig ismételte a színezést, amíg el nem fogytak a megszínezhető mezők.



a) Melyik az a legnagyobb egész N szám, melyre akárhogy is színez be kezdetben Karcsi N mezőt, Piroška még nem tudja kiszínezni az összes kimaradt mezőt?

b) Melyik az a legkisebb M szám, melyre akárhogy is színez ki Karcsi M mezőt, Piroška biztosan ki tudja színezni a teljes háromszöget?

c) Határozzátok meg a fenti N és M értékeket n oldalú szabályos háromszögrács esetén is.



5. Az indiánok misztikusnak tartják az olyan nemnegatív valós számokból álló x_0, x_1, x_2, \dots sorozatokat, melyekre $x_0 < 2021$, $x_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor \{x_i\}$ minden $i \geq 0$ esetén, továbbá szerepel a sorozatban 0-tól különböző egész szám. Hány olyan sorozat létezik, amelyet misztikusnak tartanak az indiánok?

Megjegyzés: x valós szám esetén $\lfloor x \rfloor$ jelöli a szám egészrészét, vagyis az x -nél nem nagyobb legnagyobb egész számot, $\{x\}$ pedig a törtrészét, vagyis $x - \lfloor x \rfloor$ -et.

6. **Játék:** Egy indiánrezervátumban 10 totemoszlopot állítottak fel a bal oldali ábrán látható háromszögrács szerint. Csendes Patak és Vörös Tűz a következő játékot szokták itt játszani: felváltva feszítenek ki köteleket két-két oszlop között, és minden kötél kifeszítésénél figyelnek arra, hogy a kifeszített kötél párhuzamos legyen a nagy háromszög egyik oldalával, illetve a kötél nem haladhat el olyan oszlop mellett, amelyet már egy másik kötél érint. Ezenkívül ha a jelenleg kifeszített kötél helyett annak egy egyenes vonalú meghosszabbítása is kifeszíthető a fenti feltételek mellett, akkor azt kell kifeszíteniük. Az veszít, amelyikőjük már nem tud a szabályoknak megfelelően több köteleket kifeszíteni.

Győztétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni. A jobb oldali ábrán egy lehetséges játék első három lépése látható. Először Csendes Patak kifeszíti a kék köteleket, majd Vörös Tűz a pirosat, aztán Csendes Patak a zöldet.



*Mindegyik megoldást külön lapra írójatok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására és **beküldésére** 210 perc áll rendelkezésetekre. A játéokra való igényeitek legkésőbb a verseny 180-adik percéig jelezzétek! Jó versenyzést kívánunk:*