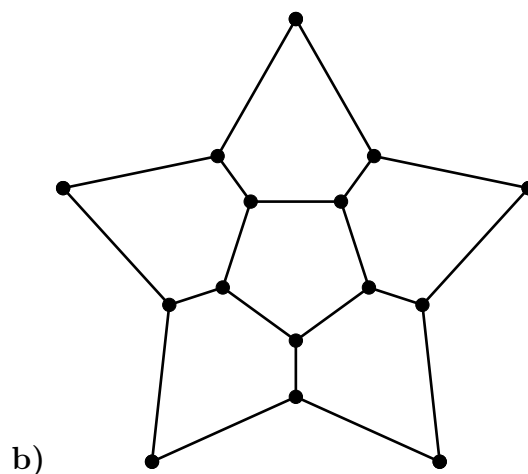
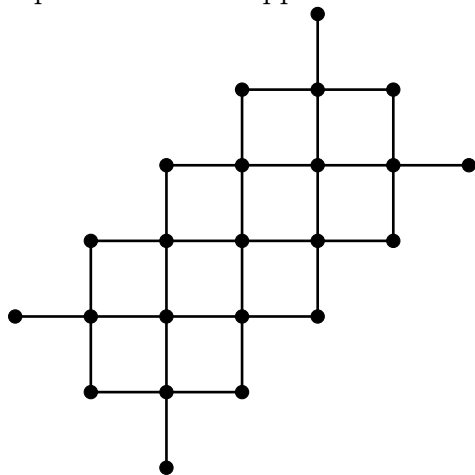




1. Bizonyítsátok be, hogy ha 2 pozitív köbszám különbsége pozitív prím, akkor az a prím 6-tal osztva 1 maradékot ad.

2. Óxisz országának pénzügyminisztere az adóösszeírás végén észrevette, hogy bármely két szomszédos város vagyonát összeadva egy ezerrel osztható számot kap dénárban számolva, a végén pedig az is feltűnt neki, hogy az ország teljes vagyona, mely az összes város dénárjainak összege, szintén egy ezerrel osztható szám. Legalább mekkora Óxisz vagyona, ha a városok térképe a következőképpen néz ki?



Megjegyzés: A városoknak nem egész mennyiségű pénze is lehet, azonban a vagyonuk mindig pozitív. A térképen a pontok jelölik a városokat, két város pedig szomszédos, ha vezet közöttük közvetlen út.

3. Legyenek A és B különböző pontjai az O középpontú k körnek úgy, hogy AB nem átmérő, továbbá legyen X tetszőleges belső pontja az AB szakasznak. Jelölje k_1 azt a kört, amely áthalad az A és X pontokon, valamint A az egyetlen közös pontja k -nak és k_1 -nek. Hasonlóan k_2 jelölje azt a kört, amely áthalad a B és X pontokon, valamint B az egyetlen közös pontja k -nak és k_2 -nek. A k_1 és k_2 körök másodjára messék egymást az M pontban. Jelölje az AOB körülírt körének, k_1 -nek és k_2 -nek a középpontját rendre Q , O_1 és O_2 . Igazoljátok, hogy az M, O, O_1, O_2, Q pontok egy körre illeszkednek.

4. Az indiánok misztikusnak tartják az olyan nemnegatív valós számokból álló x_0, x_1, x_2, \dots sorozatokat, melyekre $x_0 < 2021$, $x_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor \{x_i\}$ minden $i \geq 0$ esetén, továbbá szerepel a sorozatban 0-tól különböző egész szám. Hány olyan sorozat létezik, amelyet misztikusnak tartanak az indiánok?

Megjegyzés: x valós szám esetén $\lfloor x \rfloor$ jelöli a szám egészrészét, vagyis az x -nél nem nagyobb legnagyobb egész számot, $\{x\}$ pedig a törtrészét, vagyis $x - \lfloor x \rfloor$ -et.

5. Egy torpedókészlet 2 darab 1×4 -es, 4 darab 1×3 -as, 6 darab 1×2 -es és 8 darab 1×1 -es hajót tartalmaz.

a) Le lehet-e rakni egy 10×10 -es táblára a teljes torpedókészletet úgy, hogy a hajók ne érintkezzenek még sarokkal sem? (A hajók vízszintesen és függőlegesen is állhatnak.)

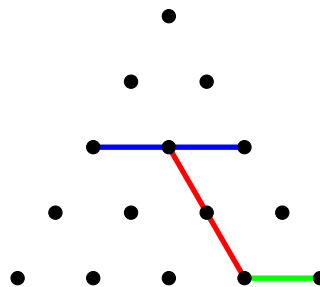
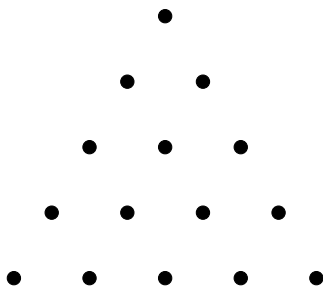


b) Megoldható-e ez akkor, ha 4 darab 1×1 -es hajót átcsereélünk 3 darab 1×2 -es hajóra? (Vagyis a darabszámok: 2, 4, 9, 4.)

c) Megoldható-e akkor, ha a maradék 4 darab 1×1 -es hajót lecseréljük egy darab 1×3 -as és egy darab 1×2 -es hajóra? (Vagyis a darabszámok: 2, 5, 10, 0.)

6. Játék: Egy indiánrezervátumban 15 totemoszlopot állítottak fel a bal oldali ábrán látható háromszögrács szerint. Csendes Patak és Vörös Tűz a következő játékot szokták itt játszani: felváltva feszítenek ki köteleket két-két oszlop között, és minden kötél kifeszítésénél figyelnek arra, hogy a kifeszített kötél párhuzamos legyen a nagy háromszög egyik oldalával, illetve a kötél nem haladhat el olyan oszlop mellett, amelyet már egy másik kötél érint. Ezenkívül ha a jelenleg kifeszített kötél helyett annak egy egyenes vonalú meghosszabbítása is kifeszíthető a fenti feltételek mellett, akkor azt kell kifeszíteniük. Az veszít, amelyikőjük már nem tud a szabályoknak megfelelően több köteleket kifeszíteni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrbe szeretnétek bújni. A jobb oldali ábrán egy lehetséges játék első három lépése látható. Először Csendes Patak kifeszíti a kék köteleket, majd Vörös Tűz a pirosat, aztán Csendes Patak a zöldet.



*Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására és **beküldésére** 210 perc áll rendelkezésetekre. A játékra való igényeitek legkésőbb a verseny 180-adik percéig jelezzétek! Jó versenyzést kívánunk:*