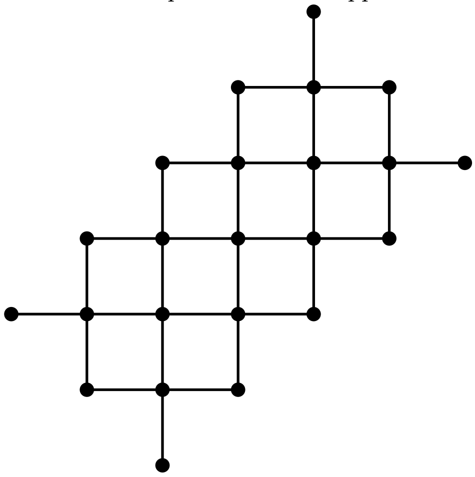
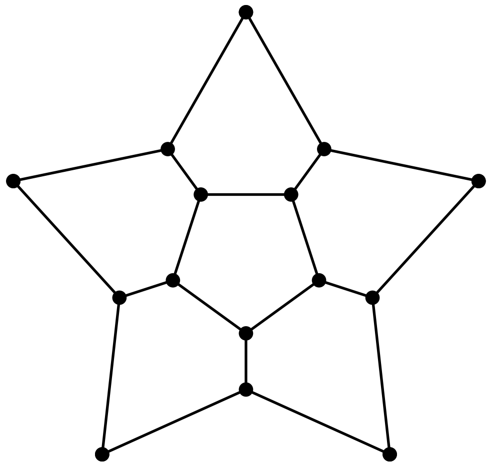
E1. Bizonyítsátok be, hogy ha 2 pozitív köbszám különbsége pozitív prím, akkor az a prím 6-tal osztva 1 maradékot ad.

Megoldás: Legyen a és b az a két pozitív egész szám, melyek köbeinek különbségét vizsgáljuk. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b$. Mivel a, b pozitív, és a köbszámok különbsége is az így az $a^3 - b^3$ különbség jöhet csak szóba.
Az ismert azonosság alapján $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Viszont ha ez az érték prímszám, akkor $a - b = 1$-nek kell teljesülnie, mivel $a, b \geq 1$-ből következik, hogy a szorzat második tagjában mindhárom összeadandó legalább 1, így az egész szorzótényező nagyobb mint 1, és ugyebár egy prímszám csak úgy bontható fel két pozitív egész szám szorzatára, ha a szorzat egyik tényezője 1. Eszerint $a = b + 1$, így $a^3 - b^3 = 1 \cdot ((b+1)^2 + (b+1)b + b^2) = 3(b^2 + b) + 1$.
Ez a kifejezés triviálisan 1 maradékot ad 3-mal osztva, illetve mivel b és b^2 paritása megegyezik, így tetszőleges pozitív b-re $b^2 + b$ páros, azaz $3(b^2 + b) + 1$ páratlan. Eszerint $3(b^2 + b)$ osztható 3-mal és 2-vel is, amiből következik, hogy osztható 6-tal is, így $3(b^2 + b) + 1 = a^3 - b^3$ 6-tal osztva 1 maradékot kell, hogy adjon.

E2. Óxisz országának pénzügyminisztere az adóösszeírás végén észrevette, hogy bármely két szomszédos város vagyonát összeadva egy ezerrel osztható számot kap dénárban számolva, a végén pedig az is feltűnt neki, hogy az ország teljes vagyona, mely az összes város dénárjainak összege, szintén egy ezerrel osztható szám. Legalább mekkora Óxisz vagyona, ha a városok térképe a következőképpen néz ki?



a)



b)

Megjegyzés: A városoknak nem egész mennyiségű pénze is lehet, azonban a vagyonuk mindig pozitív. A térképen a pontok jelölik a városokat, két város pedig szomszédos, ha vezet közöttük közvetlen út.

Megoldás: Először általános észrevételeket teszünk, amik mindkét térkép esetén teljesülnek. Nevezzük a városokat csúcsoknak, és két várost akkor köt össze él, ha szomszédosak. Minden v csúcs esetén jelöljük $f(v)$-vel a város vagyonát dénárban mérve. Először is vegyük észre, hogy ha valamelyik v városra $f(v) > 1000$, akkor ha $f(v) - 1000$ lenne ehelyett a vagyonuk, akkor még mindig teljesülnének a feladat feltételei, és az összvagyon kevesebb lenne. Tehát feltehetjük, hogy minden v csúcs esetén $0 < f(v) \leq 1000$.

A kulcs megfigyelés az, hogy ezen feltételek mellett minden u, v éllel összekötött csúcsok esetén $f(u)$ egyértelműen meghatározza $f(v)$-t. Ugyanis $1000 \mid f(u)+f(v)$, így ha $f(u) < 1000$ akkor $f(u)+f(v) < 2000$, tehát csak $f(v) = 1000 - f(u)$ lehetséges, míg ha $f(u) = 1000$, akkor $1000 < f(u) + f(v) \leq 2000$, így csak az $f(v) = 1000$ jön szóba. Így ha egy csúcsnak meghatároztuk az értékét, akkor a szomszédait is tudjuk, majd azoknak a szomszédait, és így tovább, egy csúcs az összes csúcs értékét meghatározza. Ezek szerint két lehetőség van:

Első lehetőség: Ha valamelyik v csúcsra $f(v) = 1000$, akkor minden csúcsra 1000, így $1000n$ dénár az összvagyon, ahol n a városok számát jelöli.

Második lehetőség: Ha $f(v) < 1000$ valamelyik v csúcsra, akkor minden csúcsra kisebb, mint 1000, így összszesen kevesebb, mint $1000n$ dénár az összvagyon.

Látható, hogy az első lehetőség mindig teljesíti a feladat feltételét, de ha a második opció megvalósítható szabályosan, akkor ott kisebb lesz az összvagyon.

a) Azt állítjuk, hogy itt megvalósítható a fent leírt második lehetőség, és 9000 dénár a minimális összvagyon.

Vegyük észre, hogy a csúcsok feloszthatók két részre (nevezzük a részeket A-nak és B-nek) úgy, hogy ha két csúcs ugyanabban a részben van, akkor nincs köztük él. Ez világos, csak kezdjük el felváltva berakosgatni a csúcsokat az A és B osztályba, és sikerülni fog.

Feltehetjük, hogy az A csoport a nagyobb, ekkor az A-ban 15 csúcs van, míg a B-ben 8. Legyen $a \in A$ csúcs, és tegyük fel, hogy már tudjuk az $f(a)$ értéket, legyen ez x. Továbbá tegyük fel, hogy $x < 1000$. Ekkor a minden b szomszédja a B-ben van, és $f(b) = 1000 - x$. Nekik a szomszédaik A-ban vannak, és x az értékük. Így tovább, látható, hogy minden A-beli csúcshoz x-t rendeltünk, és minden B-beli

csúcshoz $(1000-x)$-et. Tehát az összvagyon

$$15x + 8(1000 - x) = 8000 + 7x.$$

$x > 0$, így több, mint 8000 dénár az összvagyon, azaz legalább 9000 dénárnak kell lennie. Ami pedig tényleg elérhető, az $x = \frac{1000}{7}$ választással. Ekkor az összvagyon tényleg 9000 dénár, és tényleg teljesülnek a feladat feltételei, így ez a megoldás.
Megjegyzés: A leírt gondolatmenet tetszőleges összefüggő páros gráfra hasonlóan elmondható.

b) Itt az a kulcs észrevétel, hogy van 5 hosszú kör, azaz v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 csúcsok, melyekre a v_i és v_{i+1} szomszédos $i = 1, 2, 3, 4$ esetén, és v_5v_1 is él. Legyen $f(v_1) = x$, és tegyük fel, hogy $x < 1000$. Menjünk végig a körön:

$$f(v_2) = 1000 - x, \quad f(v_3) = x, \quad f(v_4) = 1000 - x, \quad f(v_5) = x, \quad f(v_1) = 1000 - x.$$

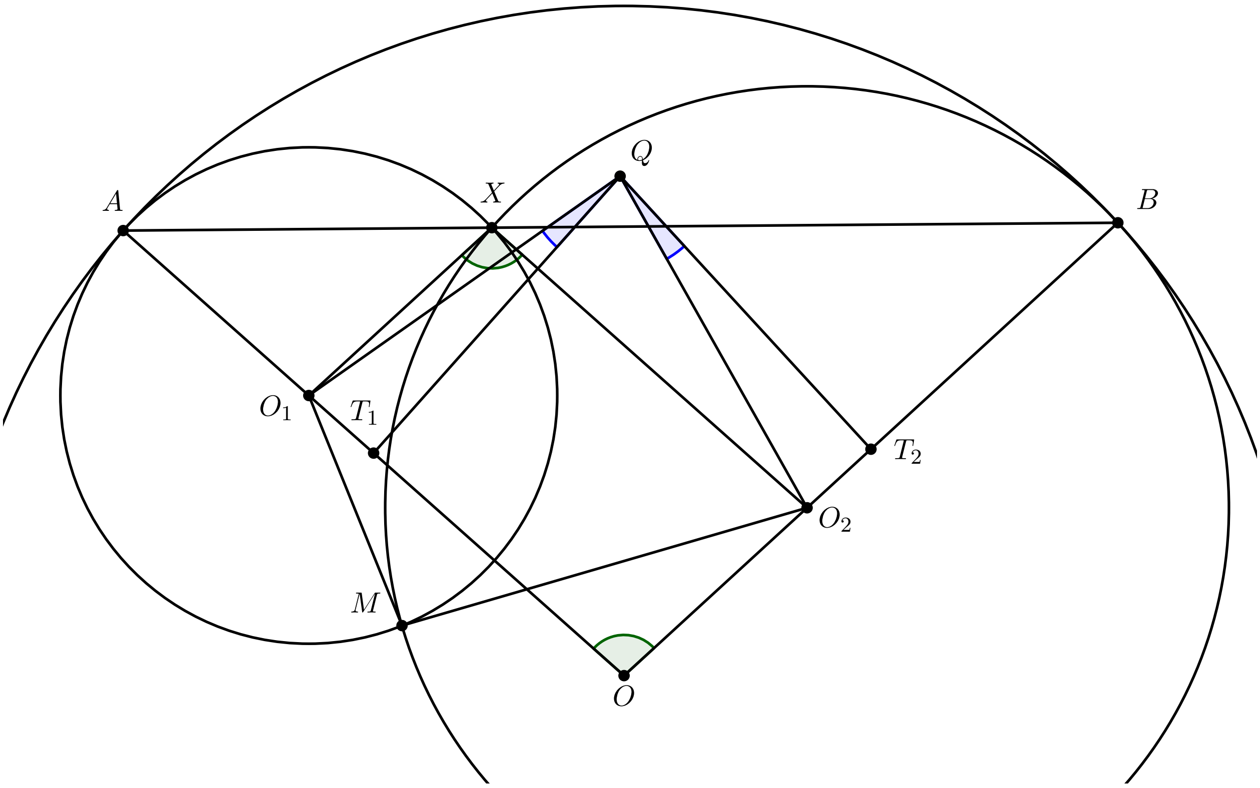
Tehát azt kaptuk, hogy $x = f(v_1) = 1000 - x$, ami csak úgy lehet, hogy $x = 500$. A v_1 csúcsból elindulva mindenkit meg tudunk határozni: A v_1 szomszédaihoz $1000 - 500 = 500$-at rendeltünk, azoknak a szomszédaihoz is 500-at, és így tovább, minden csúcshoz 500-at kellett rendelnünk. Ám összesen 15 csúcs van, tehát az összvagyon $15 \cdot 500 = 7500$ dénár, ami nem osztható 1000-rel, így ellentmondásra jutottunk.
Tehát a második lehetőség nem jön szóba, így csak az lehet, hogy minden csúcshoz 1000-t rendelünk, vagyis 15000 dénár a lehető legkisebb összvagyon.
Megjegyzés: Ebből a gondolatmenetből következik, hogy egy olyan összefüggő gráf esetén, amelyben van páratlan hosszú kör, ha a gráfnak páros sok csúcsa van, akkor minden csúcshoz 500-at, páratlan sok csúcs esetén pedig 1000-et rendelve érhetjük el a minimumot.

Ismert tétel, hogy minden összefüggő gráfban vagy van páratlan kör, vagy páros gráf, így az **a)** és **b)** rész megoldásai együttesen tetszőleges összefüggő gráf esetén megoldják a feladatot.

E3. Legyenek A és B különböző pontjai az O középpontú k körnek úgy, hogy AB nem átmérő, továbbá legyen X tetszőleges belső pontja az AB szakasznak. Jelölje k_1 azt a kört, amely áthalad az A és X pontokon, valamint A az egyetlen közös pontja k-nak és k_1-nek. Hasonlóan k_2 jelölje azt a kört, amely áthalad a B és X pontokon, valamint B az egyetlen közös pontja k-nak és k_2-nek. A k_1 és k_2 körök másodjára messék egymást az M pontban. Jelölje az AOB körülírt körének, k_1-nek és k_2-nek a középpontját rendre Q, O_1 és O_2. Igazoljátok, hogy az M, O, O_1, O_2, Q pontok egy körre illeszkednek.

Megoldás: Belátjuk, hogy Q és M is rajta van O_1O_2O köréírt körén. Tudjuk, hogy $BAO\sphericalangle = OBA\sphericalangle = O_1XA\sphericalangle = BXO_2\sphericalangle$, tehát OO_1XO_2 paralelogramma. Így $AO_1 = O_1X = OO_2$. Legyen Q merőleges vetülete AO-n T_1, BO-n T_2. Q az AOB köréírt körének középpontja, így QT_1 és QT_2 rendre az AO és BO szakaszok felezőmerőlegesei, továbbá $AO = BO$ miatt még $QT_1 = QT_2$ is következik. Ebből már világos, hogy QT_1O_1 és QT_2O_2 háromszögek egybevágóak, mivel $O_1T_1 = AT_1 - AO_1 = OT_2 - OO_2 = O_2T_2$, így két oldaluk és a közrezárt szögük megegyezik. Tehát $O_1QO_2\sphericalangle = T_1QT_2\sphericalangle = 180° - O_1OO_2\sphericalangle$, ezzel Q-ra beláttuk az állítást.

$O_1X = O_1M$ és $O_2X = O_2M$, így O_1XO_2M deltoid, továbbá tudjuk, hogy OO_1XO_2 paralelogramma, így $O_1MO_2\sphericalangle = O_2XO_1\sphericalangle = O_1OO_2\sphericalangle$, amivel M-re is igazoltuk az állítást.



E4. Az indiánok misztikusnak tartják az olyan nemnegatív valós számokból álló $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozatokat, melyekre $x_0 < 2021$, $x_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor \{x_i\}$ minden $i \geq 0$ esetén, továbbá szerepel a sorozatban 0-tól különböző egész szám. Hány olyan sorozat létezik, amelyet misztikusnak tartanak az indiánok?

Megjegyzés: x valós szám esetén $\lfloor x \rfloor$ jelöli a szám egészrészét, vagyis az x-nél nem nagyobb legnagyobb egész számot, $\{x\}$ pedig a törtrészét, vagyis $x - \lfloor x \rfloor$-et.

Megoldás: Nevezzünk egy sorozatot n-misztikusnak, ha $x_0 < n$, $x_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor \{x_i\}$, továbbá szerepel a sorozatban 0-tól különböző egész szám. A feladat a 2021-misztikus sorozatok számát kérdezi, mi általánosan n-re oldjuk meg. Azt állítjuk, hogy $2^{n-1} - 1$ darab n-misztikus sorozat van.

Legyen $S(n)$ az n-misztikus sorozatok halmaza, $A(n)$ pedig az n-misztikus sorozatok száma. Világos, hogy $A(1) = 0$, belátjuk, hogy $A(n+1) = 2A(n) + 1$. Az első észrevételünk a következő: ha $x_0 < n + 1$, akkor $x_1 < n$. Ez igaz, hiszen $x_1 = \lfloor x_0 \rfloor \{x_0\}$ és $\lfloor x_0 \rfloor \leq n$, $\{x_0\} < 1$.

Tekintsük az $S(n+1)$-beli sorozatokat. Nyilvánvalóan $S(n) \subset S(n+1)$, így elég azokat a sorozatokat leírnunk, amelyekre $x_0 \geq n$. Ezekben a sorozatokban van nemnulla egész tag, ha ez a nulladik, akkor az csak $x_0 = n$ lehet. Az összes többiben egy későbbi tag lesz egész, vagyis x_1-től tekintve a sorozatot egy $S(n)$-beli sorozatot kapunk. Mivel itt $\lfloor x_0 \rfloor = n$, és $x_1 = \lfloor x_0 \rfloor \{x_0\}$, így $\{x_0\} = x_1/n$-nek teljesülnie kell, ami minden $x_1 < n$ esetén pontosan egyféleképpen valósítható meg. Tehát az olyan $S(n+1)$-beli sorozatok, amelyekre $x_0 > n$, bijekcióban állnak az $x_1 < n$ elemeikkel, amelyek pont $S(n)$-et alkotják. Tehát valóban azt kaptuk, hogy $A(n+1) = 2A(n) + 1$, ebből és $A(1) = 0$-ból indukcióval következik, hogy $A(n) = 2^{n-1} - 1$.

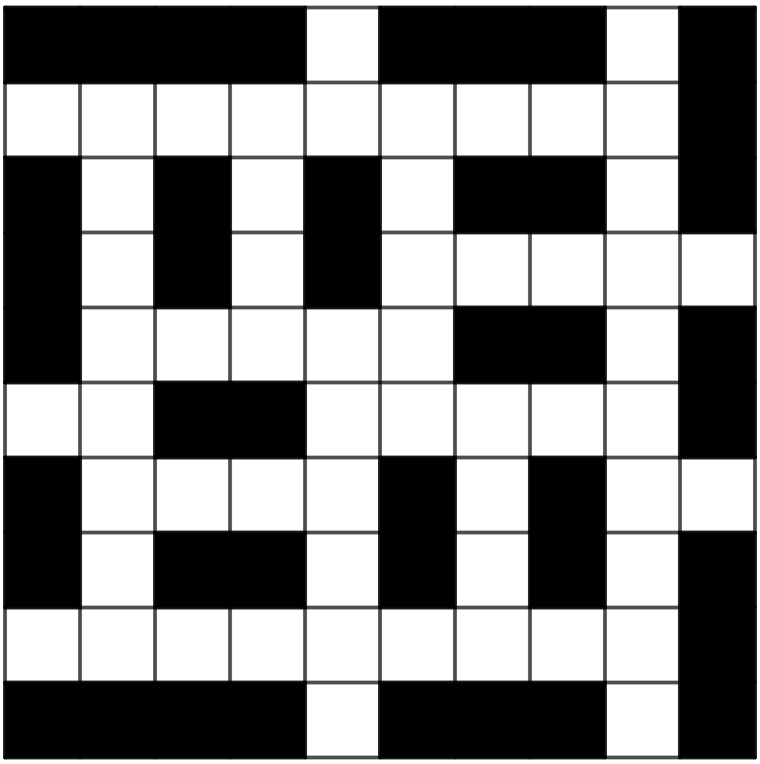
E5. Egy torpedókészlet 2 darab 1×4-es, 4 darab 1×3-as, 6 darab 1×2-es és 8 darab 1×1-es hajót tartalmaz.
a) Le lehet-e rakni egy 10×10-es táblára a teljes torpedókészletet úgy, hogy a hajók ne érintkezzenek még sarokkal sem? (A hajók vízszintesen és függőlegesen is állhatnak.)
b) Megoldható-e ez akkor, ha 4 darab 1×1-es hajót átcserélünk 3 darab 1×2-es hajóra? (Vagyis a darabszámok: 2, 4, 9, 4.)
c) Megoldható-e akkor, ha a maradék 4 darab 1×1-es hajót lecseréljük egy darab 1×3-as és egy darab 1×2-es hajóra? (Vagyis a darabszámok: 2, 5, 10, 0.)

Megoldás:

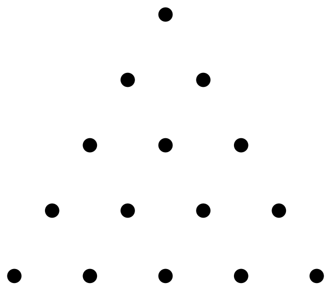
a) Nem lehet. Osszuk fel a táblát $5 \cdot 5$ darab kis 2×2 méretű négyzetre. Egy ilyen kis részben bármely két mező érinti egymást, így minden részbe csak egy hajó lóghat bele. Ám egy 1×1-es és egy 1×2-es hajó legalább 1, míg egy 1×3 és 1×4 méretű hajó legalább 2 kis részbe belelóg, így összesen legalább $2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 26$ kis részbe belelógnának a hajók, tehát nem lehet őket lehelyezni.

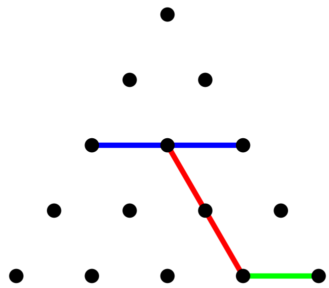
b) Tegyük fel, hogy valahogy lehelyeztük a hajókat. Minden hajót növeljünk meg minden irányban fél egységgel, azaz egy $1 \times c$ méretű hajóból $2 \times (c+1)$ méretű hajó lesz. Világos, hogy az így kapott hajók nem fedik egymást, és benne vannak abban a táblázatban, amit úgy kapunk, hogy a nagy táblázatot minden irányban fél egységgel megnöveljük, azaz egy 11×11 méretű táblázatban. A megnövelt hajók összterülete $2 \cdot 10 + 4 \cdot 8 + 9 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 122$, míg a megnövelt táblázat területe $11 \cdot 11 = 121$, így nem lehet lehelyezni a hajókat.

c) Ebben az esetben van konstrukció:

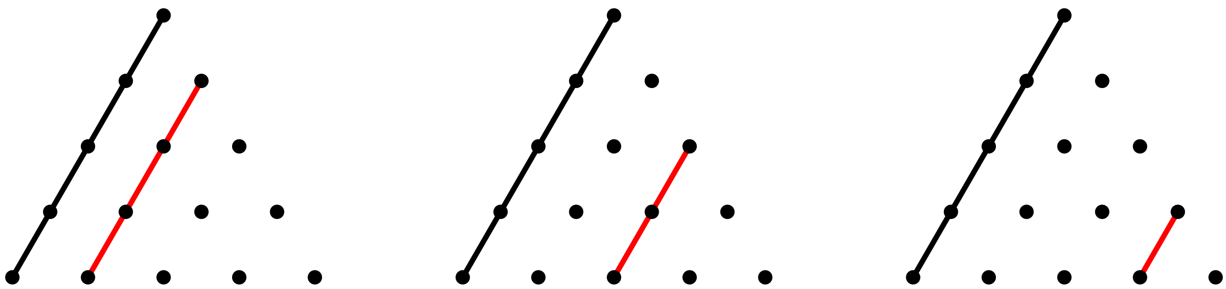


E6. **Játék:** Egy indiánrezervátumban 15 totemoszlopot állítottak fel a bal oldali ábrán látható háromszögrács szerint. Csendes Patak és Vörös Tűz a következő játékot szokták itt játszani: felváltva feszítenek ki köteleket két-két oszlop között, és minden kötél kifeszítésénél figyelnek arra, hogy a kifeszített kötél párhuzamos legyen a nagy háromszög egyik oldalával, illetve a kötél nem haladhat el olyan oszlop mellett, amelyet már egy másik kötél érint. Ezenkívül ha a jelenleg kifeszített kötél helyett annak egy egyenes vonalú meghosszabbítása is kifeszíthető a fenti feltételek mellett, akkor azt kell kifeszíteniük. Az veszít, amelyikőjük már nem tud a szabályoknak megfelelően több kötelet kifeszíteni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni. A jobb oldali ábrán egy lehetséges játék első három lépése látható. Először Csendes Patak kifeszíti a kék kötelet, majd Vörös Tűz a pirosat, aztán Csendes Patak a zöldet.



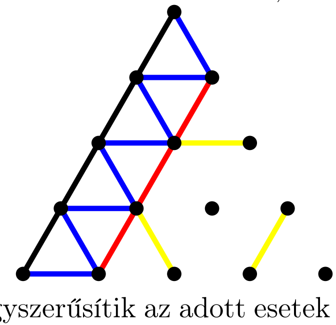


Megoldás: *Az indiánokat játékosnak, a köteleket szakasznak vagy vonalnak is fogjuk nevezni.* A játékban a második játékosnak van nyerő stratégiája. Az első lépés alapján három esetet vizsgálunk meg:



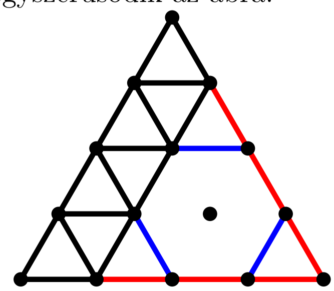
Amennyiben az első játékos a piros szakaszt húzza be (forgásszimmetria alapján feltehető, hogy valamelyik pirosat vagy feketét húzza be), annyiban a feketét húzza be a második játékos. Ha az első játékos feketét húz be, a második játékos tetszés szerinti pirosat behúzhat.

Definiáljuk a triviális szakaszokat a következőképpen: 1 hosszú, még be nem húzott élek, melyeknek a végpontjaiban lévő oszlopokat már érint kötél. Például az első esetben az alábbi ábrán a jelenleg behúzható egy hosszú szakaszok közül a kékek a triviálisak, a sárgák nem.



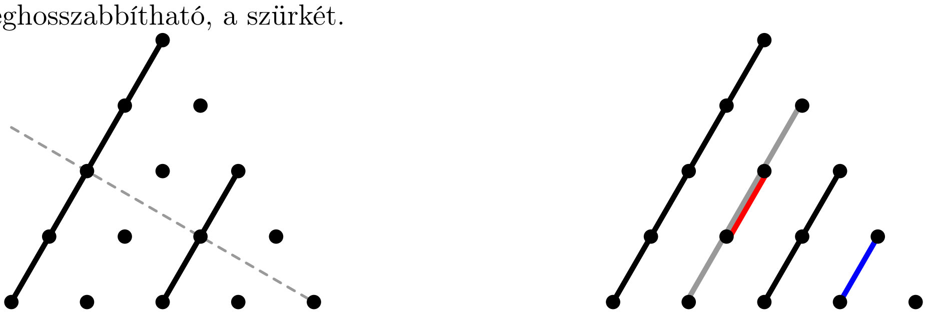
A triviális szakaszok nagyban leegyszerűsítik az adott esetek vizsgálatát: Amennyiben egy lépésünk után páros sok ilyen szakasz van (például az első két lépés után), akkor tehetjük azt, hogy pontosan akkor húzunk be triviális szakaszt, amikor a másik játékos is. Ez alapján mindig leegyszerűsíthetjük a jelenlegi állást magunknak: "behúzhatjuk" az eddig kialakult triviális szakaszokat, mert azok közül mindig mi fogjuk a legutolsót behúzni, így elég a tábla maradék részén stratégiát találnunk.

Első eset: A fentebbi ábrák közül a bal oldalin lévő szakaszok az első két behúzott szakasz. Ekkor az állás arra egyszerűsödik le, amin csak a fekete szakaszok vannak behúzva az alábbi ábrákon. Ekkor (tengelyes szimmetriától eltekintve) az első játékos ha valamelyik piros szakaszt húzza be, akkor a második az adott ábrán lévő másik piros szakasz behúzásával válaszol, és a kék szakaszokkal tovább egyszerűsödik az ábra.



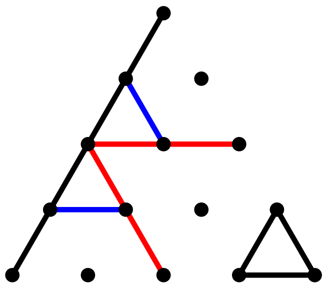
Könnyen látható, hogy ezekben a leegyszerűsödött állásokban a második játékos nyer: az első és harmadikban fix a még lejátszandó lépések száma, a másodikban pedig tudja tükrözni az első játékos lépéseit.

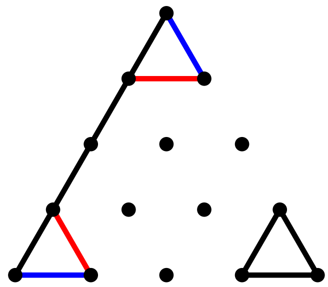
Második eset: Ekkor a második játékos végig az alábbi bal oldali ábrán behúzott szaggatott szürke vonalra tükrözött lépését lépi az első játékosnak, kivéve amikor az nem tükrözhető. Ekkor a jobb oldali ábrán lévő valamely nem fekete szakaszt kell behúznia az első játékosnak, és ilyenkor a másik, szintén olyan szakaszt húzza be a második. Tehát a piros és szürke esetén a kéket, a kék esetén pedig a pirosat, vagy ha az meghosszabbítható, a szürkét.



Ezzel a stratégiával a fekete szakaszokkal párhuzamos szakaszok páros sok (2 vagy 4) lépésben lesznek behúzva, és a többi, azokkal nem párhuzamos szakasz is páros sok lépésben lesz behúzva. Tehát a feketék behúzása után még páros sok lépés történik, így a második játékos tud nyerni.

Harmadik eset: Ekkor az állás arra egyszerűsödik le, amin csak a fekete szakaszok vannak behúzva az alábbi ábrákon. Ekkor (tengelyes szimmetriától eltekintve) ha az első játékos valamelyik piros szakaszt húzza be, akkor a második az adott ábrán lévő másik piros szakasz behúzásával válaszol, és a kék szakaszokkal tovább egyszerűsödik az ábra.





Az első ábrán látható állásban a még meglépendő lépések száma állandó és páros. Ezt úgy láthatjuk, hogy jelenleg 1 nagy terület van belül, amely végül 13 területre lesz osztva, és minden szakasz egy új részt hoz létre. így 14 lépés van hátra, és a második játékos fog nyerni.

A második ábrán tükrözni tudja minden lépését az első játékosnak, így tud nyerni.

A harmadik ábrán vegyük észre, hogy a pirosak által határolt részben még mindenképp pontosan 8 darab lépés fog történni, tehát ott mindenképpen tud utolsó lépést lépni a második játékos, a két másik részben pedig tükrözni.

Végül nézzük az utolsó esetet. Az első játékos lépésére vagy tudunk válaszolni az előző három eset alapján (és nyerni), vagy az első játékos a nagy háromszög egyik oldalán lévő, még be nem húzott szakaszt húzza be. Ekkor a második játékos viszont behúzza a másikat, és hasonlóan az első ábrához, nyer.

A megoldásunkban lévő stratégia nem az egyetlen nyerő stratégia, az egyes állásokban több nyerő lépés is lehetséges. A stratégiánk viszont biztosítja a második játékos győzelmét, így Vörös Tűz tud azt követve nyerni Csendes Patak ellen.