XIV. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA
kifejtős

Döntő:
2021. május 21.

E+
kategória

9-12.
osztályosok

1. Legyenek A és B különböző pontjai az O középpontú k körnek úgy, hogy AB nem átmérő, továbbá legyen X tetszőleges belső pontja az AB szakasznak. Jelölje k_1 azt a kört, amely áthalad az A és X pontokon, valamint A az egyetlen közös pontja k-nak és k_1-nek. Hasonlóan k_2 jelölje azt a kört, amely áthalad a B és X pontokon, valamint B az egyetlen közös pontja k-nak és k_2-nek. A k_1 és k_2 körök másodjára messék egymást az M pontban. Jelölje az AOB körülírt körének, k_1-nek és k_2-nek a középpontját rendre Q, O_1 és O_2. Igazoljátok, hogy az M, O, O_1, O_2, Q pontok egy körre illeszkednek.

2. Az indiánok misztikusnak tartják az olyan nemnegatív valós számokból álló $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozatokat, melyekre $x_0 < 2021$, $x_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor \{x_i\}$ minden $i \geq 0$ esetén, továbbá szerepel a sorozatban 0-tól különböző egész szám. Hány olyan sorozat létezik, amelyet misztikusnak tartanak az indiánok?
Megjegyzés: x valós szám esetén $\lfloor x \rfloor$ jelöli a szám egészrészét, vagyis az x-nél nem nagyobb legnagyobb egész számot, $\{x\}$ pedig a törtrészét, vagyis $x - \lfloor x \rfloor$-et.

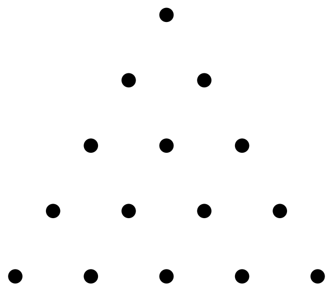
3. Halloween estéjén egy n fős gyerekcsapat k darab teljesen egyforma tábla csokoládét szerzett. Az este végén szét akarták osztani a csokoládékat úgy, hogy minden gyerek ugyanannyi csokit kapjon, és egyik tábla csokit se törjék kettőnél több részre. Milyen n és k értékek esetén tudják így elosztani?

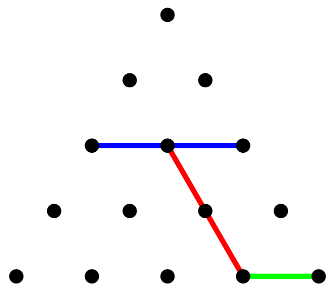
4. Egy torpedókészlet 2 darab 1×4-es, 4 darab 1×3-as, 6 darab 1×2-es és 8 darab 1×1-es hajót tartalmaz.
a) Le lehet-e rakni egy 10×10-es táblára a teljes torpedókészletet úgy, hogy a hajók ne érintkezzenek még sarokkal sem? (A hajók vízszintesen és függőlegesen is állhatnak.)
b) Megoldható-e ez akkor, ha 4 darab 1×1-es hajót átcserélünk 3 darab 1×2-es hajóra? (Vagyis a darabszámok: 2, 4, 9, 4.)
c) Megoldható-e akkor, ha a maradék 4 darab 1×1-es hajót lecseréljük egy darab 1×3-as és egy darab 1×2-es hajóra? (Vagyis a darabszámok: 2, 5, 10, 0.)

5. Legyen n pozitív egész szám. Igazoljátok, hogy $2n^2 - 1$ minden pozitív osztója különböző maradékot ad $2n$-nel osztva.

6. Játék: Egy indiánrezervátumban 15 totemoszlopot állítottak fel a bal oldali ábrán látható háromszögrács szerint. Csendes Patak és Vörös Tűz a következő játékot szokták itt játszani: felváltva feszítenek ki köteleket két-két oszlop között, és minden kötél kifeszítésénél figyelnek arra, hogy a kifeszített kötél párhuzamos legyen a nagy háromszög egyik oldalával, illetve a kötél nem haladhat el olyan oszlop mellett, amelyet már egy másik kötél érint. Ezenkívül ha a jelenleg kifeszített kötél helyett annak egy egyenes vonalú meghosszabbítása is kifeszíthető a fenti feltételek mellett, akkor azt kell kifeszíteniük. Az veszít, amelyikőjük már nem tud a szabályoknak megfelelően több kötelet kifeszíteni.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni. A jobb oldali ábrán egy lehetséges játék első három lépése látható. Először Csendes Patak kifeszíti a kék kötelet, majd Vörös Tűz a pirosat, aztán Csendes Patak a zöldet.





Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására és ***beküldésére*** *210 perc áll rendelkezésetekre. A játékra való igényeitek legkésőbb a verseny 180-adik percéig jelezzétek! Jó versenyzést kívánnak:*

a XIV. Dürer Verseny szervezői