XIV. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA
megoldások

Döntő:
2021. május 21-22.

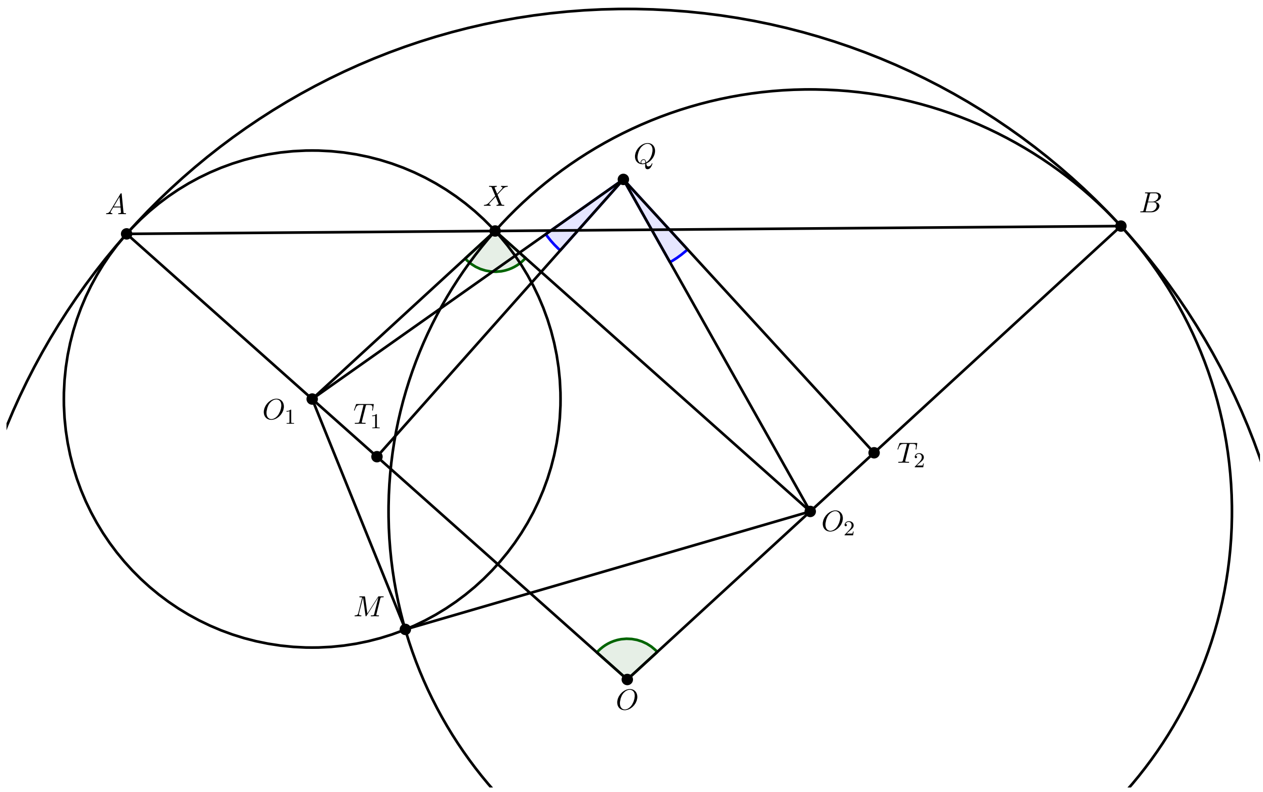
E+
kategória

9-12.
osztályosok

E+1. Legyenek A és B különböző pontjai az O középpontú k körnek úgy, hogy AB nem átmérő, továbbá legyen X tetszőleges belső pontja az AB szakasznak. Jelölje k_1 azt a kört, amely áthalad az A és X pontokon, valamint A az egyetlen közös pontja k-nak és k_1-nek. Hasonlóan k_2 jelölje azt a kört, amely áthalad a B és X pontokon, valamint B az egyetlen közös pontja k-nak és k_2-nek. A k_1 és k_2 körök másodjára messék egymást az M pontban. Jelölje az AOB körülírt körének, k_1-nek és k_2-nek a középpontját rendre Q, O_1 és O_2. Igazoljátok, hogy az M, O, O_1, O_2, Q pontok egy körre illeszkednek.

Megoldás: Belátjuk, hogy Q és M is rajta van O_1O_2O köréírt körén. Tudjuk, hogy $BAO\sphericalangle = OBA\sphericalangle = O_1XA\sphericalangle = BXO_2\sphericalangle$, tehát OO_1XO_2 paralelogramma. Így $AO_1 = O_1X = OO_2$. Legyen Q merőleges vetülete AO-n T_1, BO-n T_2. Q az AOB köréírt körének középpontja, így QT_1 és QT_2 rendre az AO és BO szakaszok felezőmerőlegesei, továbbá $AO = BO$ miatt még $QT_1 = QT_2$ is következik. Ebből már világos, hogy QT_1O_1 és QT_2O_2 háromszögek egybevágóak, mivel $O_1T_1 = AT_1 - AO_1 = OT_2 - OO_2 = O_2T_2$, így két oldaluk és a közrezárt szögük megegyezik. Tehát $O_1QO_2\sphericalangle = T_1QT_2\sphericalangle = 180° - O_1OO_2\sphericalangle$, ezzel Q-ra beláttuk az állítást.

$O_1X = O_1M$ és $O_2X = O_2M$, így O_1XO_2M deltoid, továbbá tudjuk, hogy OO_1XO_2 paralelogramma, így $O_1MO_2\sphericalangle = O_2XO_1\sphericalangle = O_1OO_2\sphericalangle$, amivel M-re is igazoltuk az állítást.



E+2. Az indiánok misztikusnak tartják az olyan nemnegatív valós számokból álló $x_0, x_1, x_2, \dots$ sorozatokat, melyekre $x_0 < 2021$, $x_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor \{x_i\}$ minden $i \geq 0$ esetén, továbbá szerepel a sorozatban 0-tól különböző egész szám. Hány olyan sorozat létezik, amelyet misztikusnak tartanak az indiánok?
Megjegyzés: x valós szám esetén $\lfloor x \rfloor$ jelöli a szám egészrészét, vagyis az x-nél nem nagyobb legnagyobb egész számot, $\{x\}$ pedig a törtrészét, vagyis $x - \lfloor x \rfloor$-et.

Megoldás: Nevezzünk egy sorozatot n-misztikusnak, ha $x_0 < n$, $x_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor \{x_i\}$, továbbá szerepel a sorozatban 0-tól különböző egész szám. A feladat a 2021-misztikus sorozatok számát kérdezi, mi általánosan n-re oldjuk meg. Azt állítjuk, hogy $2^{n-1} - 1$ darab n-misztikus sorozat van.

Legyen $S(n)$ az n-misztikus sorozatok halmaza, $A(n)$ pedig az n-misztikus sorozatok száma. Világos, hogy $A(1) = 0$, belátjuk, hogy $A(n+1) = 2A(n) + 1$. Az első észrevételünk a következő: ha $x_0 < n + 1$, akkor $x_1 < n$. Ez igaz, hiszen $x_1 = \lfloor x_0 \rfloor \{x_0\}$ és $\lfloor x_0 \rfloor \leq n$, $\{x_0\} < 1$.

Tekintsük az $S(n+1)$-beli sorozatokat. Nyilvánvalóan $S(n) \subset S(n+1)$, így elég azokat a sorozatokat leírnunk, amelyekre $x_0 \geq n$. Ezekben a sorozatokban van nemnulla egész tag, ha ez a nulladik, akkor az csak $x_0 = n$ lehet. Az összes többiben egy későbbi tag lesz egész, vagyis x_1-től tekintve a sorozatot egy $S(n)$-beli sorozatot kapunk. Mivel itt $\lfloor x_0 \rfloor = n$, és $x_1 = \lfloor x_0 \rfloor \{x_0\}$, így $\{x_0\} = x_1/n$-nek teljesülnie kell, ami minden $x_1 < n$ esetén pontosan egyféleképpen valósítható meg. Tehát az olyan $S(n+1)$-beli sorozatok, amelyekre $x_0 > n$, bijekcióban állnak az $x_1 < n$ elemeikkel, amelyek pont $S(n)$-et alkotják. Tehát valóban azt kaptuk, hogy $A(n+1) = 2A(n) + 1$, ebből és $A(1) = 0$-ból indukcióval következik, hogy $A(n) = 2^{n-1} - 1$.

E+3. Halloween estéjén egy n fős gyerekcsapat k darab teljesen egyforma tábla csokoládét szerzett. Az este végén szét akarták osztani a csokoládékat úgy, hogy minden gyerek ugyanannyi csokit kapjon, és egyik tábla csokit se törjék kettőnél több részre. Milyen n és k értékek esetén tudják így elosztani?

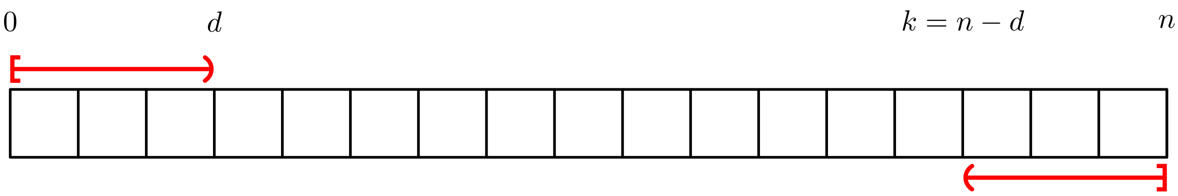
1. Megoldás: Azt állítjuk, hogy pontosan akkor tudnak osztozkodni, ha $n \leq k$, vagy $n > k$ és $n-k \mid n$. Először mutatunk egy konstrukciót, hogy ezekben az esetekben tényleg van megoldás.

Konstrukció ($n \leq k$). Először arra az esetre mutatunk konstrukciót, amikor $n \leq k$. Ekkor mindenkinek $\frac{k}{n}$ csokit kell kapnia. Helyezzük sorba egymás után a k csokit. Majd vágjuk szét ezt a sort n egyenlő részre. Mivel $\frac{k}{n} \geq 1$, ezért egy csokit legfeljebb egyszer vágunk ketté, így ez a felosztás megfelel a feltételeknek.

Konstrukció ($k < n$ és $n-k \mid n$). Minden csokit vágjunk ketté $k : (n-k)$ arányban. Ekkor k ember kap egy-egy k/n méretű darabot. Míg a maradék $n-k$ ember igazságosan osztozik a k darab $(n-k)/n$ méretű darabokon. Ezt megtehetik, hiszen $n-k \mid n-(n-k) = k$. Tehát közülük is mindenki $\frac{k}{n-k} \cdot \frac{n-k}{n} = \frac{k}{n}$ csokit kap.

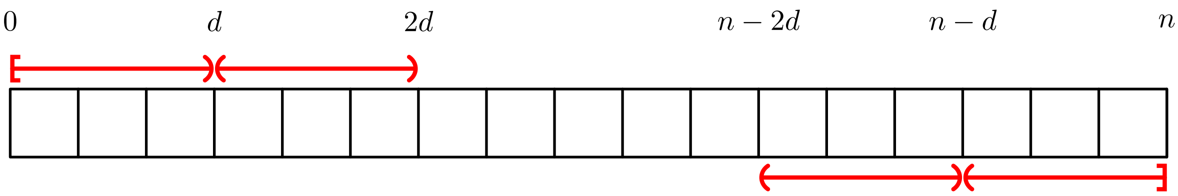
A lehetetlenség igazolása. Megmutatjuk, hogy más esetben nem tudnak a feltételeknek megfelelően osztozkodni. Világos, hogy $n > 2k$ esetén nem valósítható meg az osztozkodás, hiszen legfeljebb $2k$ darab csokit hozunk létre a tördelés után, viszont ennél több gyerek van. Így feltehetjük, hogy $k+1 \leq n \leq 2k-1$. Egy egységnek $1/n$ csokit tekintünk. Ebben az esetben egy gyereknek k egység csoki jár. Legyen $d = n-k$.

Nem lehet olyan darabot törni egy csokiból, ami nagyobb, mint k egység. (Az ábrán jelöljük ezt az információt: pirossal jelöljük, ahol biztosan nem lehet törni.)



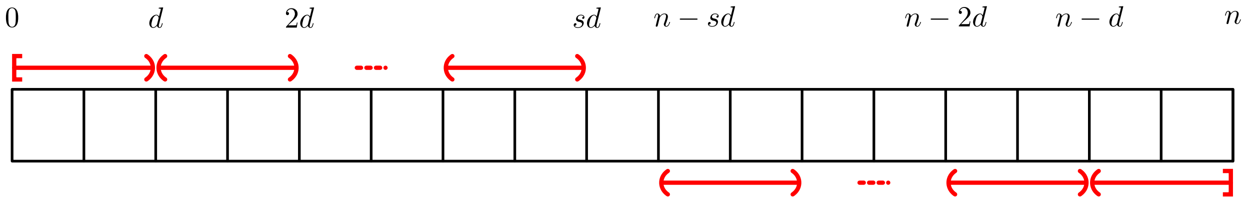
Valóban, hiszen aki ezt a darabot kapná, az biztosan többet kapna, mint az átlag. Ebből azonnal következik az is, hogy olyan rész sem lehet, amely kisebb, mint $d = n-k$ egység (hiszen akkor a másik darab k-nál nagyobb lenne).

Lépjünk eggyel tovább! Nem lehet olyan darabot törni egy csokiból, aminek a mérete nagyobb, mint $n-2d$ egység, de kisebb, mint $n-d$.



Miért is nem lehetséges ez? Ha lenne egy ilyen darab, akkor aki ezt megkapná, annak $k = n-d$-re kellene kiegészítenie. Azonban ehhez biztosan használni kellene egy d-nél kisebb darabot. Ez azonban nem lehetséges. Tovább is folytathatjuk. Tegyük fel, hogy már megtettünk $s-1$ lépést. Ekkor nem lehet olyan darabot törni egy csokiból, aminek a mérete nagyobb, mint $n-sd$ egység, de kisebb, mint $n-(s-1)d$.

Ha egy rész $(n-sd, n-(s-1)d)$ közti méretű lenne, akkor annak a kipótlásához minden csoki legfeljebb $(s-1)d$ méretű lenne, továbbá világos, hogy kell lennie olyan darabnak aminek a mérete nem osztható d-vel. Így feltétlenül használni kellene egy $(0,d)$, $(d,2d)$, … vagy $((s-2)d, (s-1)d)$ közti méretű darabot, amit az indukciós feltevés szerint nem lehet.



Látjuk, hogy így csak azok a törések megengedettek, melyekre mindkét rész méretét osztja d, azaz csak akkor maradhatnak megengedett törések, ha a $d \mid n$. Ezzel az állításunkat beláttuk.

2. Megoldás: Mutatunk még egy megoldást arra, hogy $k+1 \leq n \leq 2k$ esetén az osztozkodás szükséges feltétele, hogy $n-k \mid n$ legyen. Legyenek az emberek egy gráf csúcsai. Két ember akkor van összekötve, ha ugyanabból a csokiból kaptak. Vagyis a gráfban minden él egy csokit szimbolizál.

Vegyük észre, hogy ebben a gráfban nem lehet kör. Ha lenne egy x hosszú kör, akkor a körben lévő x embernek összesen legalább x csokit meg kell kapnia. Így lenne olyan, akinek több jutna, mint amennyi jár. Tehát minden összefüggőségi komponens fagráf.

Nézzük a gráf egy összefüggőségi komponensét. Legyen ebben g ember, ők kapjanak összesen c csokit. Mivel ez a komponens fa, így $c = g - 1$. Tehát ebben a komponensben egy embernek $(g-1)/g$ csoki jut. Azonban akkor ennyi csoki jut minden embernek. Másrészt tudjuk, hogy n ember és k csoki van, ez azt jelenti, hogy

$$\frac{k}{n} = \frac{g-1}{g}$$

valamilyen g egész számra. Ezt átalakítva kapjuk, hogy $n = g(n-k)$, azaz csak akkor valósítható meg az osztozkodás, ha $n-k$ osztója n-nek.

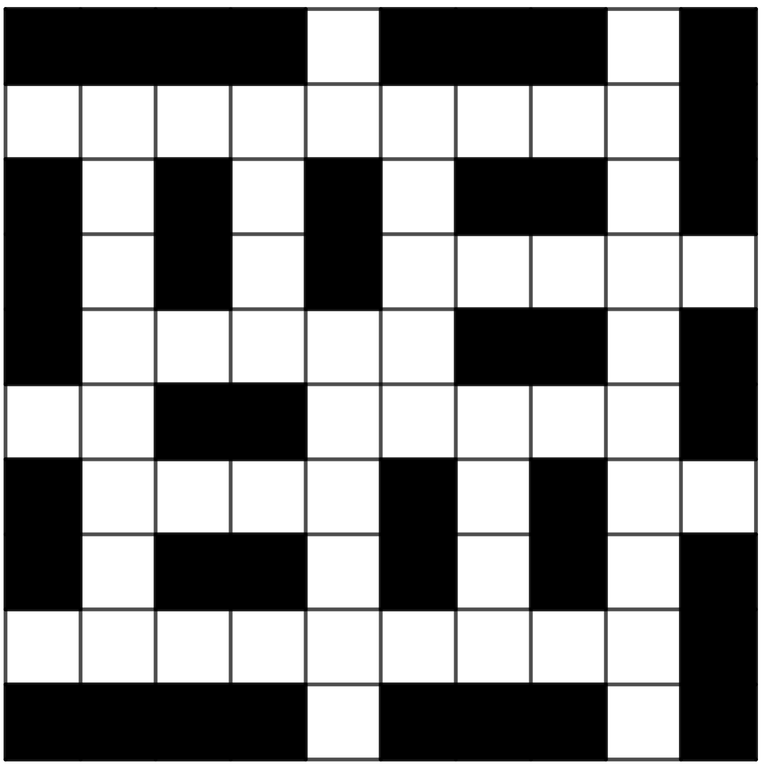
E+4. Egy torpedókészlet 2 darab 1×4-es, 4 darab 1×3-as, 6 darab 1×2-es és 8 darab 1×1-es hajót tartalmaz.
a) Le lehet-e rakni egy 10×10-es táblára a teljes torpedókészletet úgy, hogy a hajók ne érintkezzenek még sarokkal sem? (A hajók vízszintesen és függőlegesen is állhatnak.)
b) Megoldható-e ez akkor, ha 4 darab 1×1-es hajót átcserélünk 3 darab 1×2-es hajóra? (Vagyis a darabszámok: 2, 4, 9, 4.)
c) Megoldható-e akkor, ha a maradék 4 darab 1×1-es hajót lecseréljük egy darab 1×3-as és egy darab 1×2-es hajóra? (Vagyis a darabszámok: 2, 5, 10, 0.)

Megoldás:

a) Nem lehet. Osszuk fel a táblát $5 \cdot 5$ darab kis 2×2 méretű négyzetre. Egy ilyen kis részben bármely két mező érinti egymást, így minden részbe csak egy hajó lóghat bele. Ám egy 1×1-es és egy 1×2-es hajó legalább 1, míg egy 1×3 és 1×4 méretű hajó legalább 2 kis részbe belelóg, így összesen legalább $2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 26$ kis részbe belelógnának a hajók, tehát nem lehet őket lehelyezni.

b) Tegyük fel, hogy valahogy lehelyeztük a hajókat. Minden hajót növeljünk meg minden irányban fél egységgel, azaz egy $1 \times c$ méretű hajóból $2 \times (c+1)$ méretű hajó lesz. Világos, hogy az így kapott hajók nem fedik egymást, és benne vannak abban a táblázatban, amit úgy kapunk, hogy a nagy táblázatot minden irányban fél egységgel megnöveljük, azaz egy 11×11 méretű táblázatban. A megnövelt hajók összterülete $2 \cdot 10 + 4 \cdot 8 + 9 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 122$, míg a megnövelt táblázat területe $11 \cdot 11 = 121$, így nem lehet lehelyezni a hajókat.

c) Ebben az esetben van konstrukció:



E+5. Legyen n pozitív egész szám. Igazoljátok, hogy $2n^2-1$ minden pozitív osztója különböző maradékot ad $2n$-nel osztva.

Megoldás: Általánosabb állítást bizonyítunk: Adott $n, k > 1$ pozitív egészek esetén kn^2-1 minden pozitív osztója különböző modulo kn. Először egy segédállítást bizonyítunk.

Lemma: Legyenek x, y relatív prím pozitív egészek. Ekkor x minden pozitív osztója pontosan akkor különböző modulo y, ha az $yc + x \mid x^2$ és $yc + x > 0$ feltételrendszert csak a $c = 0$ teljesíti az egész számok körében.

A lemma bizonyítása.

Az odairány: Amennyiben létezik másik c megoldás, akkor $yc + x = d_1d_2$ alakban írható, ahol $d_1, d_2 \mid x$ és $d_1, d_2 > 0$. Azonban

$$x \equiv yc + x = d_1d_2 \quad (y)$$

miatt $x/d_1 \equiv d_2$ (y). Azért tudunk d_1-gyel osztani, mert $(x, y) = 1$, így $(d_1, y) = 1$. Viszont ekkor a feltevés szerint ez csak úgy lehet, ha $x/d_1 = d_2$, tehát $c = 0$.

A visszairány: Ha létezne két azonos maradékot adó pozitív osztó, $d_1 \equiv d_2$ (y), akkor

$$\frac{x}{d_1}d_2 \equiv x \quad (y).$$

Világos, hogy $(d_2x/d_1) \mid x^2$, így

$$c = \frac{d_2x/d_1 - x}{y}$$

megoldás, és $d_1 \neq d_2$ miatt $c \neq 0$. Ezzel bizonyítottuk a lemmát.

A lemmánkat a feladat állítására alkalmazva azt kapjuk, hogy a $knc + kn^2 - 1 \mid (kn^2-1)^2$ és $knc + kn^2 - 1 > 0$ feltétel rendszernek csak a $c = 0$ a megoldása. Hozzuk ezt kicsit szebb alakra: Legyen $c' = c - n$, ezt behelyettesítve a bizonyítandó állítás a következő: A $knc' - 1 \mid (kn^2-1)^2$ és $knc' - 1 > 0$ felételeket csak $c' = n$ teljesíti. Mostantól c'-t jelöljük c-vel.

Tekintsük a k-t rögzítettnek. Egy (n, c) pár jó, ha teljesíti az előző feltételeket. Tegyük fel, hogy (n, c) jó pár, ekkor (c, n) is jó, mivel

$$0 \equiv (kn^2-1)^2 \equiv (kn^2 - (knc)^2)^2 = (kn^2)^2(kc^2-1)^2 \pmod{knc - 1}.$$

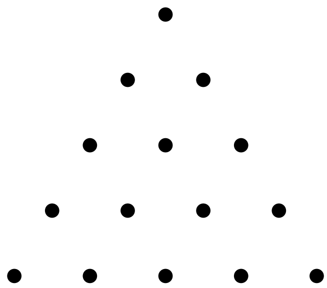
Világos, hogy $knc - 1$ relatív prím kn^2-hez, így azt kaptuk, hogy $knc - 1 \mid (kc^2-1)^2$, és ez pont annak a feltétele, hogy (c, n) jó pár.

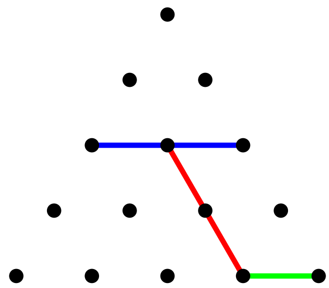
Végül, ha (n, c) jó, és $n < c$, akkor létezik (n, c') jó, melyre $n > c'$. Ugyanis vegyük észre, hogy

$$\frac{(kn^2-1)^2}{knc-1} = knc' - 1$$

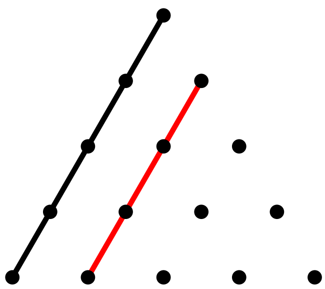
valamilyen c'-re, hiszen a bal oldal kongruens -1-gyel modulo kn. Könnyen látható, hogy ekkor $c' < n$, és (n, c') jó pár, így (c', n) is jó pár. Tehát találtunk egy olyan jó párt, amiben mindkét elem kisebb, mint az eredeti párban, és ezt tudnánk folytatni, végtelen leszállás, ami ellentmondás. Ugyanígy ellentmondásra jutunk, ha $n > c$, így tényleg teljesülnie kell, hogy $n = c$.

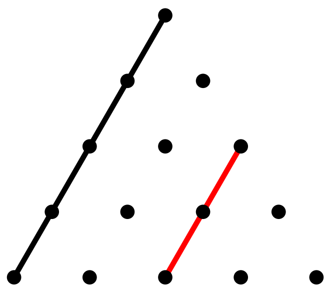
E+6. **Játék:** Egy indiánrezervátumban 15 totemoszlopot állítottak fel a bal oldali ábrán látható háromszögrács szerint. Csendes Patak és Vörös Tűz a következő játékot szokták itt játszani: felváltva feszítenek ki köteleket két-két oszlop között, és minden kötél kifeszítésénél figyelnek arra, hogy a kifeszített kötél párhuzamos legyen a nagy háromszög egyik oldalával, illetve a kötél nem haladhat el olyan oszlop mellett, amelyet már egy másik kötél érint. Ezenkívül ha a jelenleg kifeszített kötél helyett annak egy egyenes vonalú meghosszabbítása is kifeszíthető a fenti feltételek mellett, akkor azt kell kifeszíteniük. Az veszít, amelyikőjük már nem tud a szabályoknak megfelelően több kötelet kifeszíteni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni. A jobb oldali ábrán egy lehetséges játék első három lépése látható. Először Csendes Patak kifeszíti a kék kötelet, majd Vörös Tűz a pirosat, aztán Csendes Patak a zöldet.

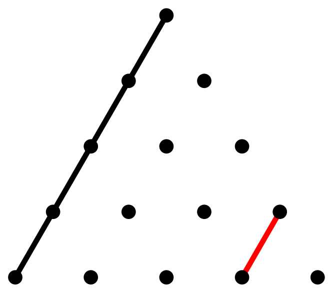




Megoldás: *Az indiánokat játékosnak, a köteleket szakasznak vagy vonalnak is fogjuk nevezni.* A játékban a második játékosnak van nyerő stratégiája. Az első lépés alapján három esetet vizsgálunk meg:

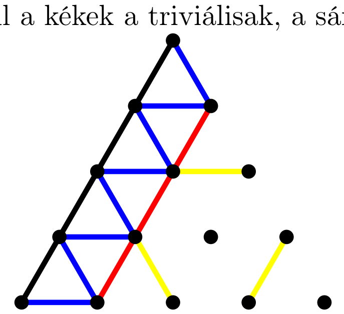






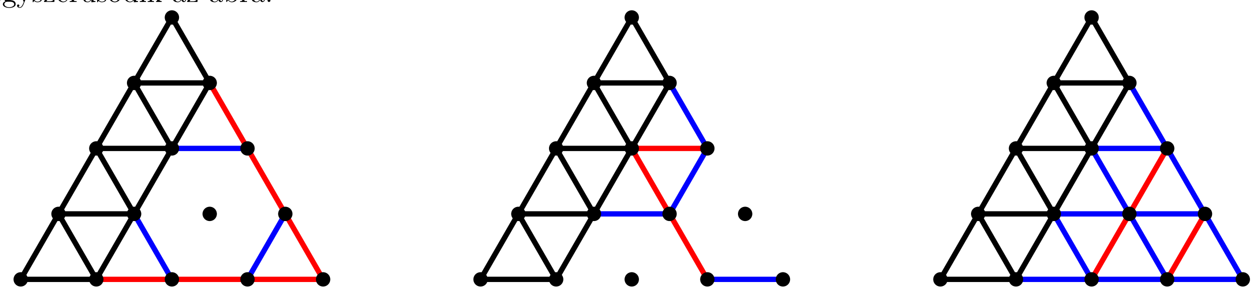
Amennyiben az első játékos a piros szakaszt húzza be (forgásszimmetria alapján feltehető, hogy valamelyik pirosat vagy feketét húzza be), annyiban a feketét húzza be a második játékos. Ha az első játékos feketét húz be, a második játékos tetszés szerinti pirosat behúzhat.

Definiáljuk a triviális szakaszokat a következőképpen: 1 hosszú, még be nem húzott élek, melyeknek a végpontjaiban lévő oszlopokat már érint kötél. Például az első esetben az alábbi ábrán a jelenleg behúzható egy hosszú szakaszok közül a kékek a triviálisak, a sárgák nem.



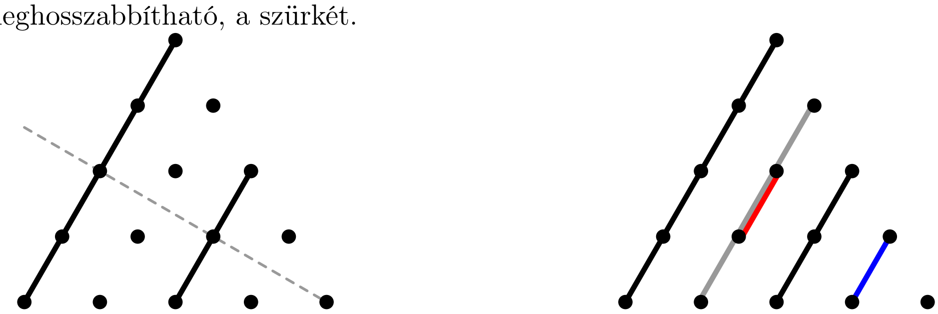
A triviális szakaszok nagyban leegyszerűsítik az adott esetek vizsgálatát: Amennyiben egy lépésünk után páros sok ilyen szakasz van (például az első két lépés után), akkor tehetjük azt, hogy pontosan akkor húzunk be triviális szakaszt, amikor a másik játékos is. Ez alapján mindig leegyszerűsíthetjük a jelenlegi állást magunknak: "behúzhatjuk" az eddig kialakult triviális szakaszokat, mert azok közül mindig mi fogjuk a legutolsót behúzni, így elég a tábla maradék részén stratégiát találnunk.

Első eset: A fentebbi ábrák közül a bal oldalin lévő szakaszok az első két behúzott szakasz. Ekkor az állás arra egyszerűsödik le, amin csak a fekete szakaszok vannak behúzva az alábbi ábrákon. Ekkor (tengelyes szimmetriától eltekintve) az első játékos ha valamelyik piros szakaszt húzza be, akkor a második az adott ábrán lévő másik piros szakasz behúzásával válaszol, és a kék szakaszokkal tovább egyszerűsödik az ábra.



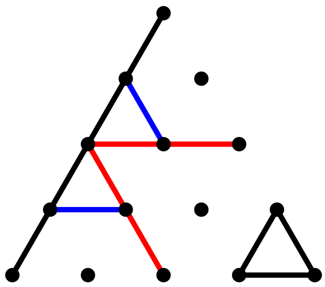
Könnyen látható, hogy ezekben a leegyszerűsödött állásokban a második játékos nyer: az első és harmadikban fix a még lejátszandó lépések száma, a másodikban pedig tudja tükrözni az első játékos lépéseit.

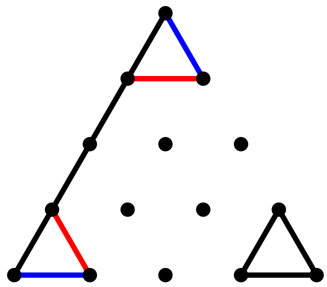
Második eset: Ekkor a második játékos végig az alábbi bal oldali ábrán behúzott szaggatott szürke vonalra tükrözött lépését lépi az első játékosnak, kivéve amikor az nem tükrözhető. Ekkor a jobb oldali ábrán lévő valamely nem fekete szakaszt kell behúznia az első játékosnak, és ilyenkor a másik, szintén olyan szakaszt húzza be a második. Tehát a piros és szürke esetén a kéket, a kék esetén pedig a pirosat, vagy ha az meghosszabbítható, a szürkét.



Ezzel a stratégiával a fekete szakaszokkal párhuzamos szakaszok páros sok (2 vagy 4) lépésben lesznek behúzva, és a többi, azokkal nem párhuzamos szakasz is páros sok lépésben lesz behúzva. Tehát a feketék behúzása után még páros sok lépés történik, így a második játékos tud nyerni.

Harmadik eset: Ekkor az állás arra egyszerűsödik le, amin csak a fekete szakaszok vannak behúzva az alábbi ábrákon. Ekkor (tengelyes szimmetriától eltekintve) ha az első játékos valamelyik piros szakaszt húzza be, akkor a második az adott ábrán lévő másik piros szakasz behúzásával válaszol, és a kék szakaszokkal tovább egyszerűsödik az ábra.





Az első ábrán látható állásban a még meglépendő lépések száma állandó és páros. Ezt úgy láthatjuk, hogy jelenleg 1 nagy terület van belül, amely végül 13 területre lesz osztva, és minden szakasz egy új részt hoz létre. így 14 lépés van hátra, és a második játékos fog nyerni.

A második ábrán tükrözni tudja minden lépését az első játékosnak, így tud nyerni.

A harmadik ábrán vegyük észre, hogy a pirosak által határolt részben még mindenképp pontosan 8 darab lépés fog történni, tehát ott mindenképpen tud utolsó lépést lépni a második játékos, a két másik részben pedig tükrözni.

Végül nézzük az utolsó esetet. Az első játékos lépésére vagy tudunk válaszolni az előző három eset alapján (és nyerni), vagy az első játékos a nagy háromszög egyik oldalán lévő, még be nem húzott szakaszt húzza be. Ekkor a második játékos viszont behúzza a másikat, és hasonlóan az első ábrához, nyer.

A megoldásunkban lévő stratégia nem az egyetlen nyerő stratégia, az egyes állásokban több nyerő lépés is lehetséges. A stratégiánk viszont biztosítja a második játékos győzelmét, így Vörös Tűz tud azt követve nyerni Csendes Patak ellen.