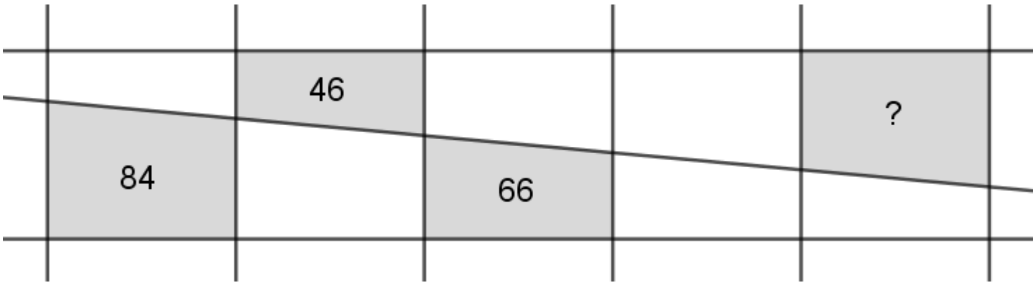
E-1. Hatosországban így néz ki a naptár: egy év 12 darab hónapból, és minden hónap 6 darab *hat*ból áll. A hónapokat ugyanúgy nevezik, mint nálunk (januártól kezdve decemberig). Az egyes hónapokban a *hat*ok viszont különböző hosszúságúak: a k. sorszámú hónapban az egyes *hat*ok 6^{k-1} napból állnak. Hány napból áll Hatosországban a tavasz (azaz a március, április és május hónapok összesen)? (3 pont)

E-2. Hány olyan n egész szám van 1 és 2021 között, melyre $2^n + 2^{n+3}$ négyzetszám? (3 pont)

E-3. Az alábbi ábrán egy négyzetrácsba belemetsző egyenest láthatunk. Néhány keletkező négyszög területét az ábrába beírtuk. Mekkora a kérdőjellel jelölt rész területe?



(3 pont)

E-4. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, melynek pontosan háromféle, egymással szomszédos értékű számjegye van? Például ilyen négyjegyű szám az 5464 vagy a 2001.
Két tízes számrendszerbeli számjegy akkor szomszédos értékű, ha a különbségük 1. (3 pont)

E-5. Hány olyan $1 \leq x \leq 2021$ egész szám van, melyre a

$$\frac{2x^3 - 6x^2 - 3x - 20}{5(x-4)}$$

kifejezés értéke egész szám? (4 pont)

E-6. Bertalan gondolt egy négyjegyű pozitív egész számra. Ezután rajzolt egy 4 csúcsú egyszerű gráfot, melynek a csúcsaiba valamilyen sorrendben beírta a gondolt számának négy számjegyét (minden csúcsba egyet). Mindezt úgy tette meg, hogy minden csúcsba éppen a csúcs fokszáma került. Hányféle számra gondolhatott Bertalan?
Egy egyszerű gráfban minden él két különböző csúcsot köt össze, és bármely két csúcs között csak legfeljebb egy él fut. (4 pont)

XIV. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA
váltó

Döntő:
2021. május 22.

E kategória

9-12.
osztályosok

E-7. Jimmy derékszögű háromszög alakú kertje egy kör alakú szigeten helyezkedik el úgy, hogy a háromszög csúcsai a sziget partján vannak. Amikor a kertjét kerítéssel vette körbe, észrevette, hogy a legrövidebb oldala éppen 36 méterrel rövidebb, mint a leghosszabb, a harmadik oldalra pedig 48 méternyi kerítést kellett tennie. A kert belsejében egy olyan kör alapú házat épített fel, melynek az alapterülete a lehető legnagyobb. Jimmy megmérte, hogy hány méter a távolság a ház alapjának középpontja és a sziget középpontja között. Mennyi ezen érték négyzete?

(4 pont)

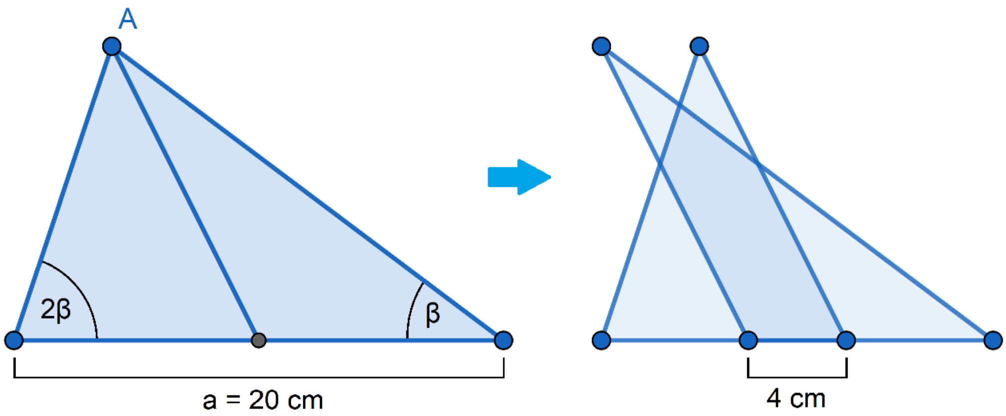
E-8. Csaba megkereste az összes olyan p valós számot, melyre az alábbi $g(x)$ polinom másodfokú tagjának együtthatója 2021. Mi ezen p értékek összege?

$$g(x) = (x-1)^2(p+2x)^2$$

(4 pont)

E-9. A 8×8-as sakktábla bal alsó mezőjén áll egy bástya. Szeretnénk eljuttatni a jobb felső sarokmezőbe. Ehhez a bástyával pontosan 9 lépést kell tennünk úgy, hogy minden lépésben 3 vagy 4 mezővel toljuk odébb. Hányféle ilyen eljutás létezik?
A bástya minden lépésben vízszintesen vagy függőlegesen mozog. (5 pont)

E-10. Adott egy háromszög, melynek a oldala 20 cm hosszú, területe pedig 125 cm^2. Tudjuk, hogy az a oldalon fekvő szögek közül az egyik kétszerese a másiknak. Berajzoljuk az a oldalhoz tartozó súlyvonalat, e mentén kettévágjuk a háromszöget, majd egymás felé toljuk a keletkezett két darabot úgy, hogy közben az a oldalból keletkezett két szakasz végig az eredeti oldalegyenesen marad. Addig toljuk egymás felé a darabokat, amíg először el nem érjük azt, hogy a két szakasz közös része 4 cm hosszú legyen. Hány cm^2 az így keletkezett alakzatnak a területe?
A keletkezett alakzat a két darab uniója, ami egy hétszög.



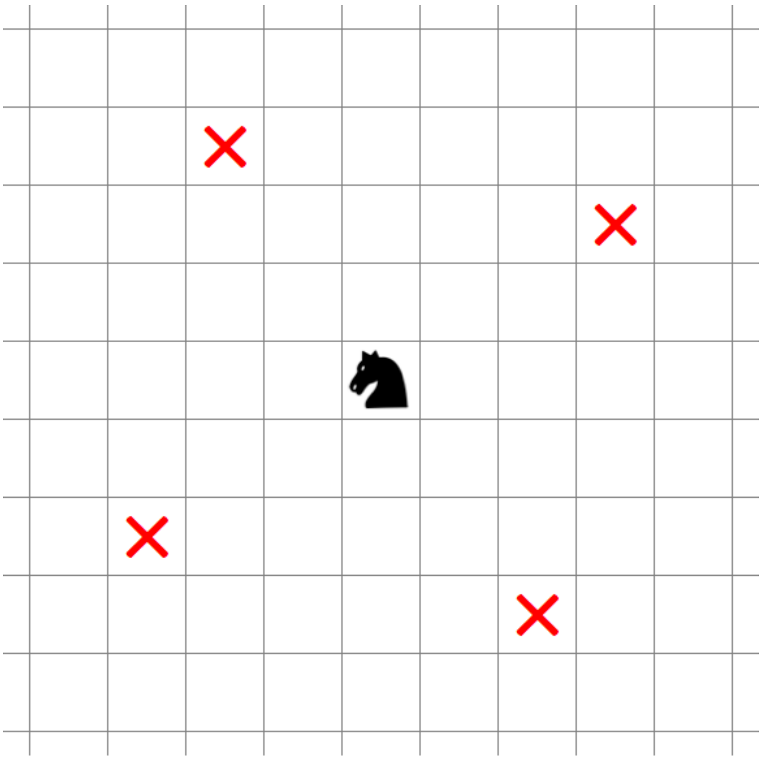
(5 pont)

E-11. Rui japán üzletember Amerikában, aki szarvasmarha-kereskedelemmel foglalkozik. A fekete csütörtöki napon még 2000 dollárért adta el egy-egy tehenét (a tehenei ára egységes). A válság kitörésével azonban hatalmas méretű ingadozások léptek fel a keresletben, amihez Rui is kénytelen volt igazodni. Minden nap kétszerezte, felezte, ötszörözte vagy ötödölte a tehenek előző napi árát (még centekben is hajlandó volt visszaadni a kuncsaftjainak). Tette mindezt úgy, hogy betartotta a híres japán babonát is, így a dollárokban vett ár egészrésze soha nem kezdődött 4-es számjeggyel.
Azon a napon, amikor Billy felkereste, hogy vásároljon tőle, egy-egy tehén ára 80 dollár volt. Legkevesebb hány nappal jártunk ekkor fekete csütörtök után? (5 pont)

E-12. Billy szabadon engedte a ménesét. A lovak ennek örömére egy négyzetrácsos rét rácsnégyzetein ugrálnak, amely rét minden irányban végtelen. Mindegyik ló az alábbi típusú ugrásokra képes: vízszintesen vagy függőlegesen valamelyik irányban hármat lép, majd balra fordul, és továbblép kettőt. Természetesen ugrás közben a ló nem ér le a földre.

A lovak éppen olyan mezőkön állnak, hogy semelyik kettő nem tud ugyanazon a mezőn találkozni ilyen ugrásokkal. Hány lova van Billynek, ha a számuk a lehető legnagyobb?

Az alábbi ábrán piros X-ek szemléltetik, hogy egy ugrás után egy ló mely mezőkön tud földet érni. Figyeljetek rá, hogy csak az ábrán látható négyféle ugrás lehetséges, nem pedig nyolcféle, mint a sakkban.



(5 pont)

E-13. Adott egy $ABCD$ trapéz, amelyben $AB \parallel CD$, $AB = 70$, $AD = 32$ és $BC = 49$. Tudjuk, hogy $ABC\sphericalangle = 3 \cdot ADC\sphericalangle$. Milyen hosszú a CD alap? (6 pont)

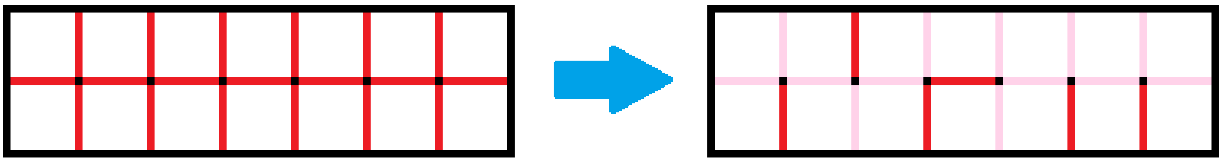
E-14. Hány olyan f függvény van $\{1, 2, \ldots, 16\}$-ból $\{1, 2, \ldots, 16\}$-ba, melyre minden $1 \leq x \leq 16$ egész számra $f(f(x)) - 4x$ osztható 17-tel? (6 pont)

E-15. Albrecht királyi családot alapított. A családban mindenkinek pontosan 8 gyermeke van. Egyetlen, de fontos szabály van: bárki unokái közül legfeljebb x-et hívhatnak Bélának. (Albrecht egyik gyermekét sem hívják Bélának.) Mennyi x legkisebb értéke, amely esetén lehetséges, hogy egy adott időponttól kezdve a család minden újszülöttjének legyen Béla nevű egyenes ági felmenője a királyi családon belül?

Albrecht és leszármazottjai közül semelyik két személynek nincs közös gyermeke. (6 pont)

E-16. Adott egy 2×7 egységnégyzetből álló négyzetrács. A rácsban található mezőket minden oldalról falak szegélyezik (a belső falak két-két mező közös határoló falai). Szeretnénk egybenyitni a négyzetrács mezőit. Ehhez a belső falak közül lerombolunk néhányat úgy, hogy ezután a négyzetrács bármely mezőjéről bármely másikra el lehessen jutni úgy, hogy közben nem lépünk át falon. Hányféleképpen nyithatjuk egybe a rácsot, ha ehhez minimális számú falat döntünk le?

Az ábrán egy lehetséges egybenyitás látható. A jobb oldali ábrán a megmaradó belső falakat pirossal, a leromboltakat halvány rózsaszínnel jelöltük. Két egybenyitást akkor tekintünk azonosnak, ha mindkettőben pontosan ugyanazokat a falakat romboljuk le.



(6 pont)

XIV. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA
váltó

Döntő:
2021. május 22.

E
kategória

9-12.
osztályosok

#	MO	A feladat szövege	P
E-1	9288	Hatosországban így néz ki a naptár: egy év 12 darab hónapból,	3p
E-2	1010	Hány olyan n egész szám van 1 és 2021 között,	3p
E-3	73	Az alábbi ábrán egy négyzetrácsba belemetsző egyenest láthatunk.	3p
E-4	276	Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van,	3p
E-5	807	Hány olyan $1 \leq x \leq 2021$ egész szám van,	4p
E-6	46	Bertalan gondolt egy négyjegyű pozitív egész számra.	4p
E-7	325	Jimmy derékszögű háromszög alakú kertje egy kör alakú szigeten	4p
E-8	8	Csaba megkereste az összes olyan p valós számot,	4p
E-9	288	A 8×8-as sakktábla bal alsó mezőjén áll egy bástya.	5p
E-10	90	Adott egy háromszög, melynek a oldala 20 cm hosszú,	5p
E-11	12	Rui japán üzletember Amerikában, aki szarvasmarha-kereskedelemmel	5p
E-12	13	Billy szabadon engedte a ménesét. A lovak ennek örömére	5p
E-13	133	Adott egy $ABCD$ trapéz, amelyben $AB \parallel CD$,	6p
E-14	48	Hány olyan f függvény van $\{1, 2, \ldots, 16\}$-ból $\{1, 2, \ldots, 16\}$-ba,	6p
E-15	20	Albrecht királyi családot alapított.	6p
E-16	2911	Adott egy 2×7 egységnégyzetből álló négyzetrács.	6p