



E⁺-1. Adott egy ABC derékszögű háromszög, amelyben $ACB \sphericalangle = 90^\circ$. D az AB szakasz egy belső pontja, és E az AC szakasz egy belső pontja. Ismert, hogy $ADE \sphericalangle = 90^\circ$, és hogy az AD szakasz hossza 8 egység, a DE szakasz hossza 15 egység, a CE szakasz hossza pedig 3 egység. Hány négyzetegység az ABC háromszög területe? (3 pont)

E⁺-2. Egy francia faluban a lakók száma négyzetszám. Ha még 100 ember beköltözne a faluba, akkor a lakók száma egy négyzetszámnál eggyel több lenne, ha pedig még újabb 100 ember beköltözne, akkor ismét négyzetszám lenne. Hányan laknak a faluban, ha a lehető legkevesebben vannak? (3 pont)

E⁺-3. Hány olyan $1 \leq x \leq 2021$ egész szám van, melyre a

$$\frac{2x^3 - 6x^2 - 3x - 20}{5(x - 4)}$$

kifejezés értéke egész szám?

(3 pont)

E⁺-4. Bertalan gondolt egy négyjegyű pozitív egész számra. Ezután rajzolt egy 4 csúcsú egyszerű gráfot, melynek a csúcsaiba valamilyen sorrendben beírta a gondolt számának négy számjegyét (minden csúcsba egyet). Mindezt úgy tette meg, hogy minden csúcsba éppen a csúcs fokszáma került. Hányféle számra gondolhatott Bertalan?

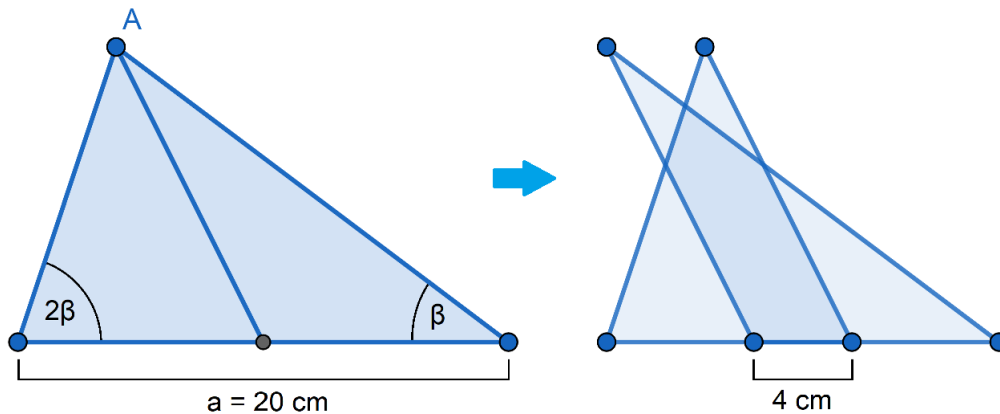
Egy egyszerű gráfban minden él két különböző csúcsot köt össze, és bármely két csúcs között csak legfeljebb egy él fut. (3 pont)

E⁺-5. Rettegott Joe seriffvizsgára jelentkezik. A vizsgán három feladat van: nyomolvasás, célba lövés és lasszódobás. Minden feladatot egy adott (feladatonként eltérő) valószínűséggel old meg sikeresen, és a feladatok sikere egymástól független. A vizsgát akkor teljesíti, ha a 3 feladatból legalább kettőt sikeresen teljesít. Joe kiszámolta, hogy ha a nyomolvasással kezdi a vizsgát, és az sikerül neki, akkor 32% az esélye a vizsga teljesítésére. Ha célba lövéssel kezd, és az sikerül neki, akkor 49% az esélye a teljesítésre, míg ha egy sikeres lasszódobással kezdi a vizsgát, akkor 52%.

Annak az esélye (a vizsga előtt nézve), hogy Joe sikeresen teljesíti a seriffvizsgát, $\frac{X}{1000}$. Mennyi X értéke? (4 pont)



E⁺-6. Adott egy háromszög, melynek a oldala 20 cm hosszú, területe pedig 125 cm^2 . Tudjuk, hogy az a oldalon fekvő szögek közül az egyik kétszerese a másiknak. Berajzoljuk az a oldalhoz tartozó súlyvonalat, e mentén kettévágjuk a háromszöget, majd egymás felé toljuk a keletkezett két darabot úgy, hogy közben az a oldalból keletkezett két szakasz végig az eredeti oldalegyenesen marad. Addig toljuk egymás felé a darabokat, amíg először el nem érjük azt, hogy a két szakasz közös része 4 cm hosszú legyen. Hány cm^2 az így keletkezett alakzatnak a területe?
A keletkezett alakzat a két darab uniója, ami egy hétszög.



(4 pont)

E⁺-7. A 8×8 -as sakktábla bal alsó mezőjén áll egy bástya. Szeretnénk eljuttatni a jobb felső sarokmezőbe. Ehhez a bástyával pontosan 9 lépést kell tennünk úgy, hogy minden lépésben 3 vagy 4 mezővel toljuk odébb. Hányféle ilyen eljutás létezik?
A bástya minden lépésben vízszintesen vagy függőlegesen mozog.

(4 pont)

E⁺-8. Benedek a következő 300 állítást írja le egy lapra:

$$\begin{array}{cccccccc}
 2 & | & 1! & & & & & \\
 3 & | & 1! & & 3 & | & 2! & \\
 4 & | & 1! & & 4 & | & 2! & & 4 & | & 3! \\
 5 & | & 1! & & 5 & | & 2! & & 5 & | & 3! & & 5 & | & 4! \\
 & & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
 24 & | & 1! & & 24 & | & 2! & & 24 & | & 3! & & 24 & | & 4! & \dots & 24 & | & 23! \\
 25 & | & 1! & & 25 & | & 2! & & 25 & | & 3! & & 25 & | & 4! & \dots & 25 & | & 23! & & 25 & | & 24!
 \end{array}$$

Hány igaz állítást írt le Benedek?

Az $|$ jel az oszthatóságot jelenti, például $6 | 4!$ jelentése: a 6 osztója a $4!$ számnak. (4 pont)



E⁺-9. Rui japán üzletember Amerikában, aki szarvasmarha-kereskedelemmel foglalkozik. A fekete csütörtöki napon még 2000 dollárért adta el egy-egy tehenét (a tehenei ára egységes). A válság kitörésével azonban hatalmas méretű ingadozások léptek fel a keresletben, amihez Rui is kénytelen volt igazodni. Minden nap kétszerezte, felezte, ötszörözte vagy ötödölte a tehenek előző napi árát (még centekben is hajlandó volt visszaadni a kuncaftjainak). Tette mindezt úgy, hogy betartotta a híres japán babonát is, így a dollárokból vett ár egésze soha nem kezdődött 4-es számjeggyel.

Azon a napon, amikor Billy felkereste, hogy vásároljon tőle, egy-egy tehén ára 80 dollár volt. Legkevesebb hány nappal jártunk ekkor fekete csütörtök után? (5 pont)

E⁺-10. Billy lovai a sík azon pontjain ugrálnak, melyek mindkét koordinátája egész. Mindegyik ló az alábbi típusú ugrásokra képes: egy pontról átugorhat annak a $(15, 9)$, $(-9, 15)$, $(-15, -9)$ vagy $(9, -15)$ vektorral való eltolójára.

A lovak éppen olyan pontokon állnak, hogy semelyik kettő nem tud ugyanazon a ponton találkozni ilyen ugrásokkal. Hány ló van Billynek, ha a számuk a lehető legnagyobb? (5 pont)

E⁺-11. Hány olyan f függvény van $\{1, 2, \dots, 16\}$ -ból $\{1, 2, \dots, 16\}$ -ba, hogy $f(f(x)) \equiv 4f(x) \pmod{17}$ teljesül minden $1 \leq x \leq 16$ egészre? Válaszként az eredményt mod 10000 adjátok meg. (5 pont)

E⁺-12. Adott egy $ABCD$ trapéz, amelyben $AB \parallel CD$, $AB = 70$, $AD = 32$ és $BC = 49$. Tudjuk, hogy $\angle ABC = 3 \cdot \angle ADC$. Milyen hosszú a CD alap? (5 pont)

E⁺-13. Egy pingpongversenyen mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A verseny végén minden fiú háromszor annyi győzelmet ért el fiúk ellen, mint lányok ellen, és minden lány kétszer annyi lánytól kapott ki, mint fiútól. Hány résztvevője volt a pingpongversenynek, ha tudjuk, hogy 10-zel több fiú vett részt, mint lány? Minden meccs egy ember győzelmével ér véget. (6 pont)

E⁺-14. Albrecht királyi családot alapított. A családban mindenkinek pontosan 8 gyermeke van. Egyetlen, de fontos szabály van: bárki unokái közül legfeljebb x -et hívhatnak Bélának. (Albrecht egyik gyermekét sem hívják Bélának.) Mennyi x legkisebb értéke, amely esetén lehetséges, hogy egy adott időponttól kezdve a család minden újszülöttjének legyen Béla nevű egyenes ági felmenője a királyi családon belül?

Albrecht és leszármazottjai közül semelyik két személynek nincs közös gyermeke. (6 pont)



E⁺-15. Adott egy 2×7 egységnégyzetből álló négyzetrács. A rácsban található mezőket minden oldalról falak szegélyezik (a belső falak két-két mező közös határoló falai). Szeretnénk egybenytetni a négyzetrács mezőit. Ehhez a belső falak közül lerombolunk néhányat úgy, hogy ezután a négyzetrács bármely mezőjéről bármely másikra el lehessen jutni úgy, hogy közben nem lépünk át falon. Hányféleképpen nyithatjuk egybe a rácsot, ha ehhez minimális számú falat döntünk le?

Az ábrán egy lehetséges egybenyitítás látható. A jobb oldali ábrán a megmaradó belső falakat pirossal, a leromboltakat halvány rózsaszínnel jelöltük. Két egybenyitást akkor tekintünk azonosnak, ha mindkettőben pontosan ugyanazokat a falakat romboljuk le.



(6 pont)

E⁺-16. Egy konvex négyszög szögeinek nagyságai az óramutató járásával megegyező sorrendben egy számtani sorozatot alkotnak, valamint az oldalhosszai is egy számtani sorozatot alkotnak (ezek viszont nem feltétlenül az óramutató járásával megegyező sorrendben). Ha a négyszög nem négyzet, és a legrövidebb oldala 1 egység, akkor a területe $a + \sqrt{b}$, ahol a és b pozitív egész számok. Mennyi $a + b$ értéke? (6 pont)

#	MO	A feladat szövege	P
E ⁺ -1	375	Adott egy ABC derékszögű háromszög, amelyben $ACB \sphericalangle = 90^\circ$.	3p
E ⁺ -2	2401	Egy francia faluban a lakók száma négyzetszám.	3p
E ⁺ -3	807	Hány olyan $1 \leq x \leq 2021$ egész szám van,	3p
E ⁺ -4	46	Bertalan gondolt egy négyjegyű pozitív egész számra.	3p
E ⁺ -5	146	Rettegett Joe seriffvizsgára jelentkezik.	4p
E ⁺ -6	90	Adott egy háromszög, melynek a oldala 20 cm hosszú,	4p
E ⁺ -7	288	A 8×8 -as sakktábla bal alsó mezőjén áll egy bástya.	4p
E ⁺ -8	137	Benedek a következő 300 állítást írja le egy lapra:	4p
E ⁺ -9	12	Rui japán üzletember Amerikában, aki szarvasmarha-kereskedelemmel	5p
E ⁺ -10	306	Billy lovai a sík azon pontjain ugrálnak, melyek mindkét koordinátája	5p
E ⁺ -11	5105	Hány olyan f függvény van $\{1, 2, \dots, 16\}$ -ből $\{1, 2, \dots, 16\}$ -ba,	5p
E ⁺ -12	133	Adott egy $ABCD$ trapéz, amelyben $AB \parallel CD$,	5p
E ⁺ -13	100	Egy pingpongversenyen mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott.	6p
E ⁺ -14	20	Albrecht királyi családot alapított.	6p
E ⁺ -15	2911	Adott egy 2×7 egységnégyzetből álló négyzetrács.	6p
E ⁺ -16	22	Egy konvex négyszög szögeinek nagyságai az óramutató járásával	6p