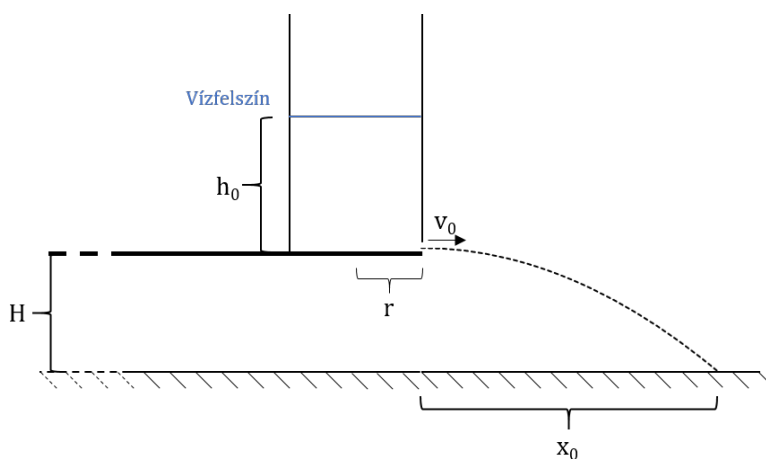


1. Feladat

(a)

I. Ábra:



1. ábra. A kísérlet kimenetele álló körhinta esetén.

II. Írjuk fel a kifolyási sebességet a Torricelli-féle kiömlési törvénnyel!

Felhasználva, hogy a nyílás szabaddá tételét követő pillanatban a vízszint még h_0 magasságú:

$$v_0 = \sqrt{2gh_0} . \quad (1)$$

III. A nyílás elhagyása után a vízcsepp mozgását egy v_0 kezdősebességű vízszintes hajításként írhatjuk le:

$$x_0 = v_0 t , \quad (2)$$

$$H = \frac{g}{2} t^2 . \quad (3)$$

IV. A becsapódási távolság az (1), (2) és (3) egyenletek alapján:

$$d_0 = R + x_0 = R + \sqrt{4Hh_0} .$$

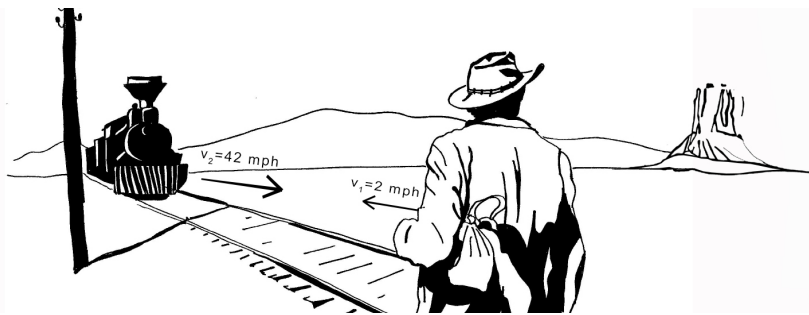
A megadott adatokat behelyettesítve:

$$d_0 = 5,63 \text{ m} .$$

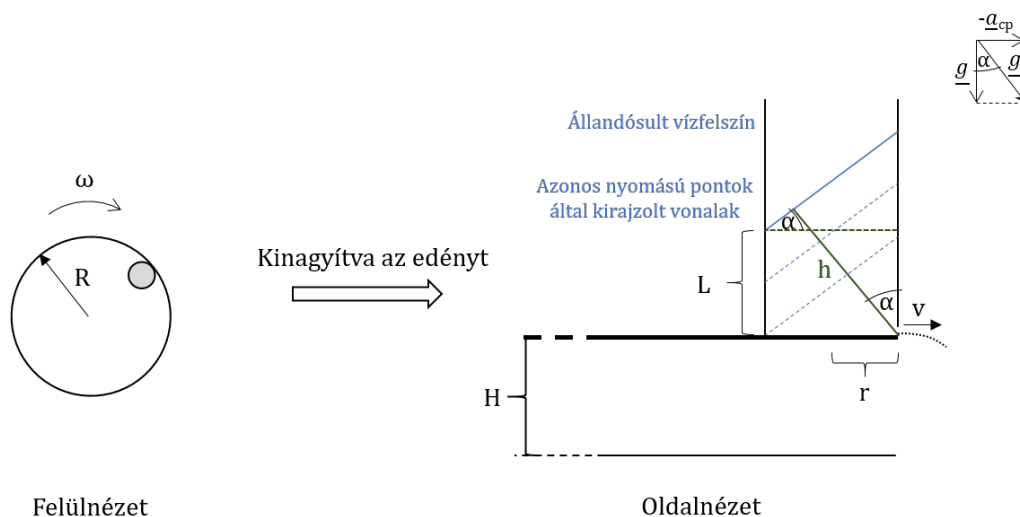
(b)

I. Vizsgáljuk meg a forgó körhintán kialakuló egyensúlyi vízfelszín!

- A körhinta ω szögsebességgel forog \Rightarrow A rendszernek van centripetális gyorsulása.



- Mivel az edény kiterjedése a körhinta méreteihez képest elhanyagolható $\Rightarrow a_{cp}$ értéke az edény esetén állandónak vehető, azaz olyan, mintha az edénynek állandó a_{cp} gyorsulása lenne.
- Ekkor bevezethetjük az effektív gravitációs gyorsulást, mely $\mathbf{g}^* = \mathbf{g} - \mathbf{a}$ alakban írható, és most $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{cp}$, azaz nagysága $g^* = \sqrt{g^2 + a_{cp}^2}$, iránya pedig $\tan \alpha = a_{cp}/g$.
- Továbbá tudjuk, hogy a folyadék szabad felszíne merőleges az eredő gyorsulásra (azaz \mathbf{g}^* -ra), ez alapján megrajzolhatjuk az egyensúlyi vízfelszínt (ld. 2. ábra).



2. ábra. A kísérlet kimenetele forgó körhinta esetén.

II. Határozzuk meg ezt követően a kifolyási sebességet a nyílás szabaddá tételét követő pillanatban!

Most is felírhatjuk a Torricelli-féle kiömlési törvényt, a következő változtatásokkal:

- Az összefüggésben g helyére g^* kerül.
- Mivel az eredő térerősség „ferde”, és az azonos nyomású pontok a térerősségre merőleges vonalak mentén helyezkednek el, az összefüggésben szereplő h mélységet a ferde felszíntől az azonos nyomású pontok által kirajzolt vonalakra merőlegesen (azaz \mathbf{g}^* -gal párhuzamosan) kell számítani.

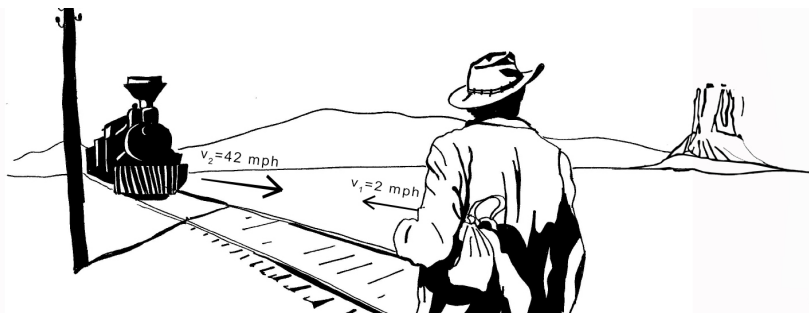
Ezeket felhasználva, a 2. ábra alapján elsőként számítsuk ki a h mélységet!

Mivel az egyensúlyi vízfelszín kialakulásáig víz nem folyik ki, a térfogat állandó marad:

$$r^2 \pi h_0 = r^2 \pi L + \frac{1}{2} r^2 \pi 2 r t g \alpha \quad \Rightarrow \quad L = h_0 - r t g \alpha .$$

Ezt felhasználva:

$$h = \cos \alpha (L + 2 r t g \alpha) = \cos \alpha (h_0 + r t g \alpha) .$$



A kifolyási sebesség ez alapján:

$$v = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{2\sqrt{g^2 + (R\omega^2)^2} \cos \alpha (h_0 + r \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (4)$$

Felhasználva, hogy α hegyesszög:

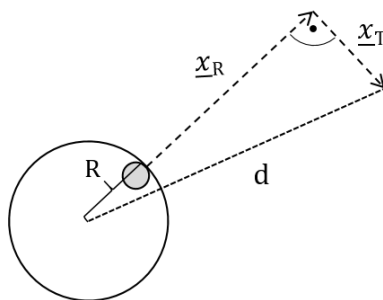
$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (R\omega^2/g)^2}}.$$

Ezt beírva (4)-be:

$$v = \sqrt{2g \left(h_0 + \frac{Rr\omega^2}{g} \right)}.$$

III. Végül határozzuk meg a becsapódási távolságot!

A nyílás elhagyása után a vízcsepp mozgását ebben az esetben is vízszintes hajítással írhatjuk le, melynek t ideje az (a) részben számolttal megegyezik. Azonban most bontsuk két, egymásra merőleges komponensre a vízszintes síkban történő elmozdulást (ld. 3. ábra).



3. ábra. A vízcsepp mozgása forgó körhinta esetén.

Sugárirányban (x_R) illetve érintőirányban (x_T) az elmozdulás, illetve ezek alapján a becsapódási távolság (d) az ábra segítségével már meghatározható:

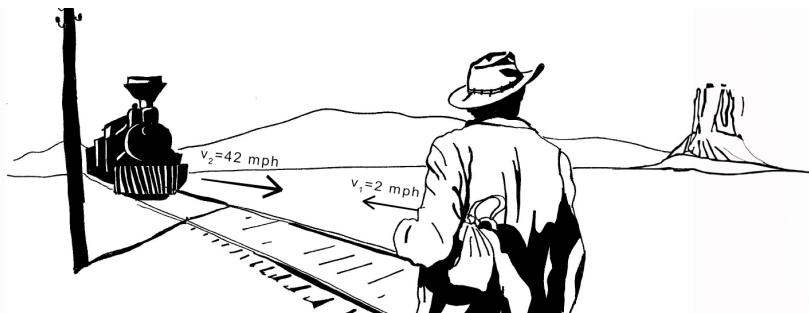
$$x_R = vt = \sqrt{2g \left(h_0 + \frac{Rr\omega^2}{g} \right)} \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{4H \left(h_0 + \frac{Rr\omega^2}{g} \right)},$$

$$x_T = R\omega t = R\omega \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

$$d = \sqrt{(R + x_R)^2 + x_T^2}.$$

A megadott adatokat behelyettesítve:

$$d = 5,92 \text{ m}.$$



2. Feladat

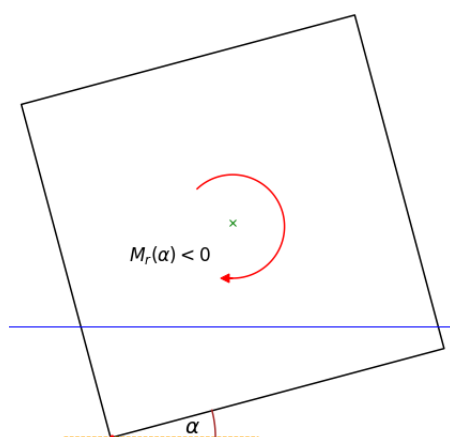
A gerenda stabilitását kétféleképpen vizsgálhatjuk. Egyik út a gerendára ható forgatónyomaték vizsgálata, a másik pedig a rendszer egészének potenciális energiájának tanulmányozása. Előbb a forgatónyomaték vizsgálatával oldjuk meg a feladatot, utána tárgyaljuk a potenciális energia szerepét.

Forgatónyomaték vizsgálata

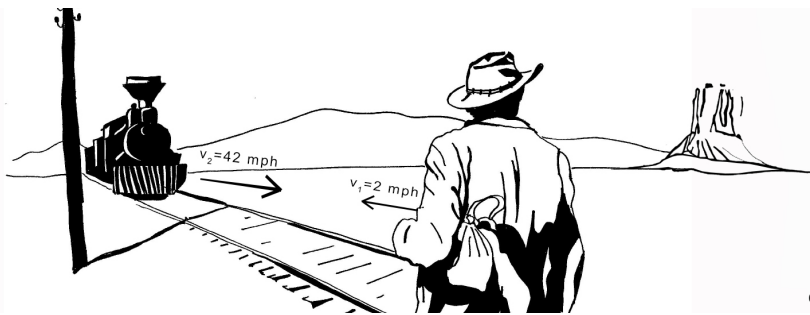
Ki fogjuk számolni, hogy mekkora forgatónyomaték hat a gerendára, ha hosszabbik élei közül kettő van a víz alatt. A forgatónyomaték két adattól függ. Egyik a dőlésszögét jellemző α szög (ld. 4. ábra). A másik az, hogy mennyire merül bele a gerenda a vízbe, ami a gerenda vízhez képesti relatív sűrűségétől függ. A víz sűrűségét ρ_0 -al, a gerenda sűrűségét ρ -val jelöljük, akkor a relatív sűrűség $r = \frac{\rho}{\rho_0}$.

A gerenda hossz tengelyére ható forgatónyomatékot jelöljük $M_r(\alpha)$ -al. Itt $r \in (0, 1)$ egy adott gerendára állandó, így $M_r(\alpha)$ egyváltozós függvényként kezelhető. A szimmetria miatt az $\alpha = 0^\circ$ -os szög esetén nem hat forgatónyomaték, ezért $M_r(0^\circ) = 0$. M előjelét úgy definiáljuk, hogy

- $M > 0$, ha a forgatónyomaték az óramutató járásával ellentétes irányba forgat.
- $M < 0$, ha a forgatónyomaték az óramutató járásával azonos irányba forgat.

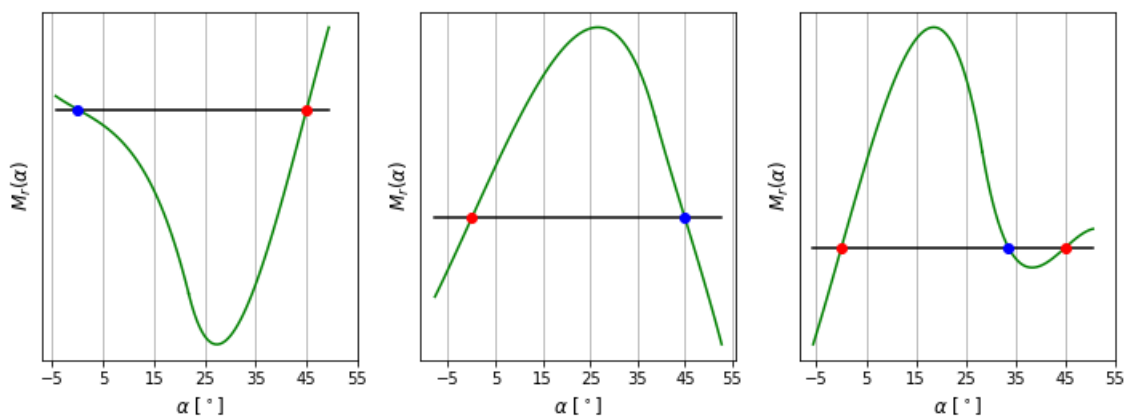


4. ábra. A kék vonal a vízszintet, a zöld x a gerenda középvonalát jelöli. Az ábrán olyan eset szerepel ahol $M < 0$, ekkor a forgatónyomaték visszaforgatja a testet az $\alpha = 0^\circ$ -os helyzetbe.



Az $M_r(\alpha)$ forgatónyomaték függvénnyel megfogalmazható a stabilitás feltétele.

- Az α fokos orientáció instabil egyensúlyi helyzet, ha az $M_r(\alpha)$ függvény monoton növekvő módon metszi az α szöget.
- Az α fokos orientáció stabil egyensúlyi helyzet, ha az $M_r(\alpha)$ függvény monoton csökkenő módon metszi az α szöget.

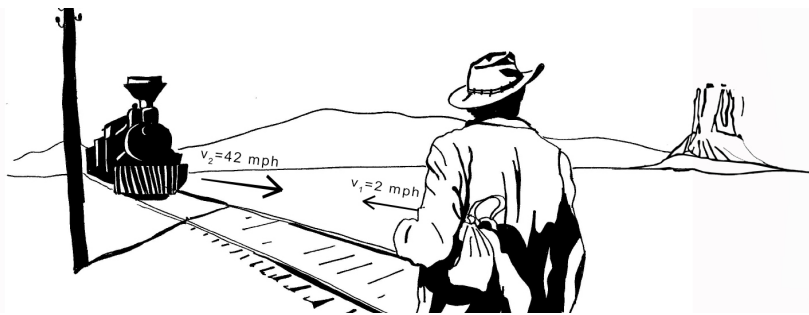


5. ábra. $M_r(\alpha)$ függvény metszéspontjai: $\alpha = 0^\circ$ és $\alpha = 45^\circ$ mindenképpen egyensúlyi helyzet a szimmetria miatt. Az ábrákon a kék pötty stabil, a piros pötty pedig instabil egyensúlyi helyzetet jelöl.

Ki fog derülni, hogy lényegében három eset van:

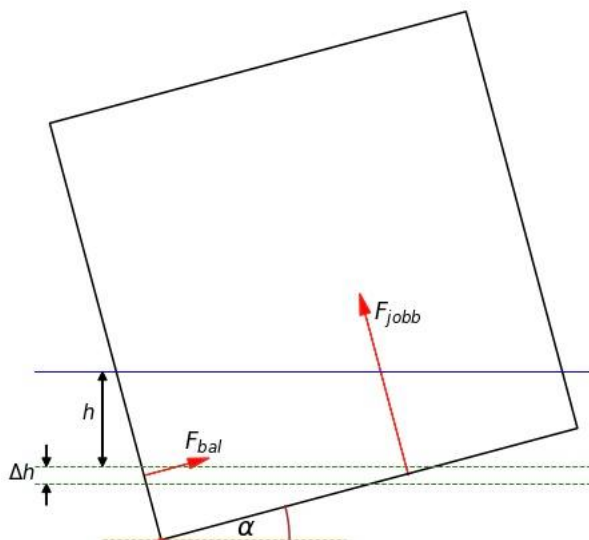
- 0° stabil, 45° instabil egyensúlyi helyzet.
- 0° instabil, 45° stabil egyensúlyi helyzet.
- 0° és 45° is instabil, és van közöttük egy stabil egyensúlyi helyzet.

Most rátérünk az $M_r(\alpha)$ függvény meghatározására. A téglatestre ható erők közül csak a hidrosztatikai nyomásból származó nyomóerőnek van eredő forgatónyomatéka a gerenda középvonalára.



Ha egy adott felületdarabra ható nyomóerőt felbontjuk vízszintes és függőleges komponensre, akkor észrevehetjük, hogy a szemközti darabokra ható vízszintes komponensek kioltják egymást. Ezért a forgatónyomaték számításánál a nyomóerőnek csak a függőleges komponensét kell figyelembe venni. Lássuk be!

h és $h + \Delta h$ mélységek között a nyomás állandó p értékűnek vehető, ha $\Delta h \rightarrow 0$. Számoljuk ki, hogy mekkora erőt fejt ki vízszintes irányban a hidrosztatikai nyomás a h és $h + \Delta h$ mélységek között húzóó sávban. A bal oldalra ható erőt jelölje F_{bal} , a jobb oldalra ható erőt pedig F_{jobb} . Ezen erők nagysága $F_{\text{bal}} = p \frac{L\Delta h}{\cos \alpha}$ és $F_{\text{jobb}} = p \frac{L\Delta h}{\sin \alpha}$, ahol α jelöli a gerenda dőlésszögét (ld. 6. ábra). F_{bal} és F_{jobb} erők vízszintes komponense megegyezik, mivel $F_{\text{bal}} \cos \alpha = F_{\text{jobb}} \sin \alpha$.

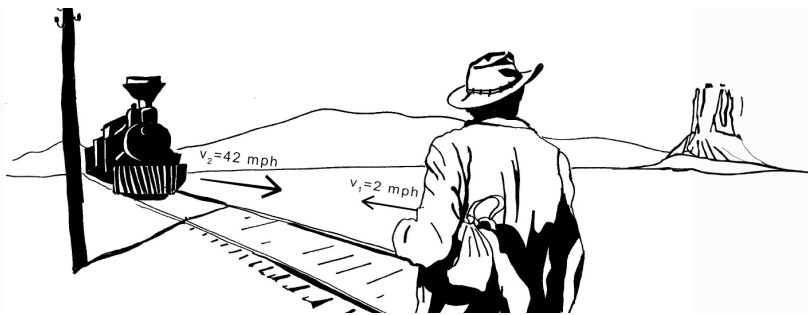


6. ábra. h és $h + \Delta h$ mélységek között a bal és jobb oldali falakra ható erők. A kék vonal a vízszintet jelöli.

Számoljuk ki a nyomóerő függőleges komponensét!

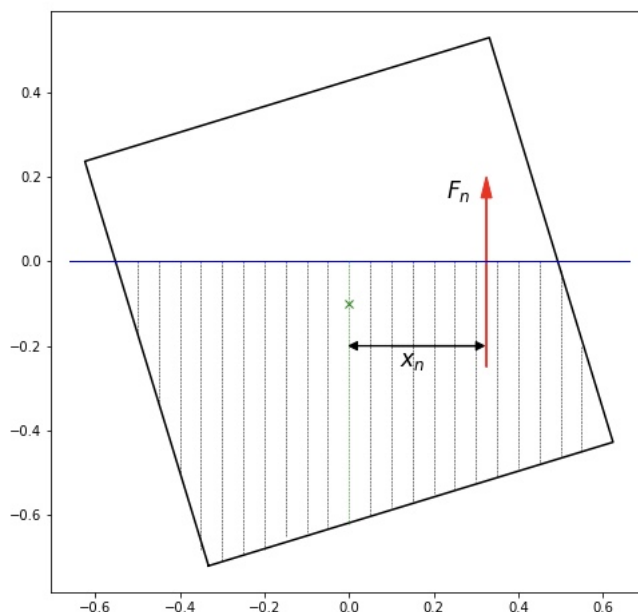
$$F_{\text{jobb}}^{\text{függőleges}} = F_{\text{jobb}} \cos \alpha = pL \frac{\Delta h}{\tan \alpha} = \rho_0 g h L \Delta x = \rho_0 g \Delta V,$$

ahol ΔV a függőleges sáv térfogata, ρ_0 a víz sűrűségét, ρ a test sűrűsége. Könnyen belátható, hogy $F_{\text{bal}}^{\text{függőleges}} = F_{\text{jobb}}^{\text{függőleges}}$. Ezek szerint a hidrosztatikai nyomás függőleges komponense pont a felhajtóerő.



Most számoljuk ki a testre ható eredő forgatónyomatékokat. Ehhez vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, aminek függőleges tengelye átmegy a test tömegközéppontján, vízszintes tengelye pedig maga a vízfelszín.

Osszuk fel a test vízben levő részét N db függőleges sávra!



7. ábra. Az n -edik sávra ható felhajtóerő $F_n = \rho_0 V_n g$. Jelölje x_n az F_n erő hatásvonalának a rönk tömegközéppontjától vett előjeles távolságát. Az n -edik darabra ható forgatónyomaték $x_n F_n$, a teljes forgatónyomaték pedig ezek összege.

Belátjuk, hogy a test tömegközéppontjára vonatkoztatott forgatónyomaték $M = mgK$, ahol mg a test súlya és K a test vízben levő részének súlypontja a választott koordináta-rendszerben.

$$M = \sum_{n=1}^N x_n \cdot \rho_0 g V_n = \frac{\rho_0}{\rho} g \sum_{n=1}^N x_n \rho V_n = \frac{g}{r} \sum_{n=1}^N x_n m_n, \text{ ahol } m_n = \rho V_n, r = \frac{\rho}{\rho_0}$$

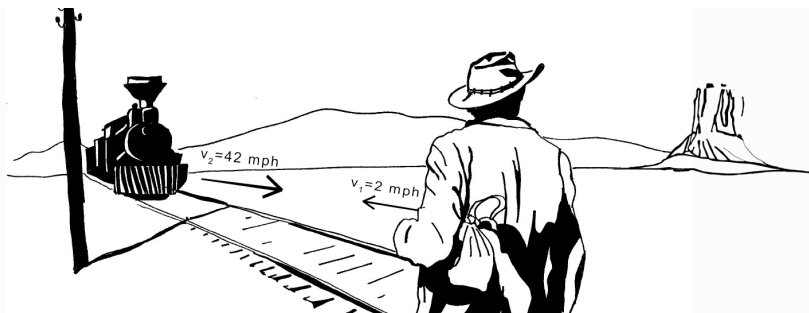
Itt m_n jelöli az n -ik vízbe lógó sáv tömegét.

Építsük bele a formulába a tömegközéppont $K = \frac{\sum x_n m_n}{\sum m_n}$ definícióját:

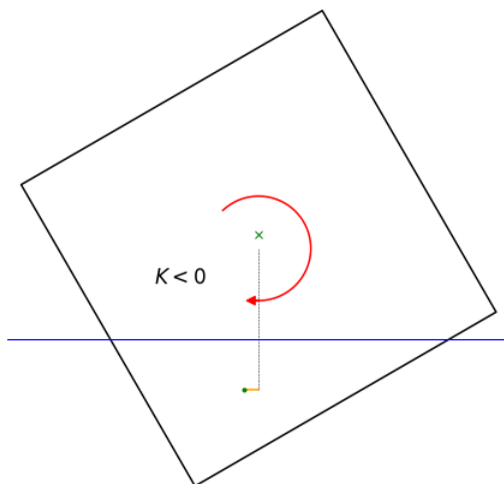
$$M = \frac{g}{r} \cdot \frac{\sum x_n m_n}{\sum m_n} \cdot \sum_{n=1}^N m_n = \frac{g}{r} K \sum_{n=1}^N m_n.$$

A vízben levő rész tömege:

$$\sum_{n=1}^N m_n = mr \quad \rightarrow \quad M = mgK.$$



Az alábbi ábrán a vízben levő rész tömegközéppontja balra van a rönk tömegközéppontjához képest, azaz $K < 0$.



8. ábra. $K < 0$, ezért olyan forgatónyomaték hat a testre, ami visszaforgatja $\alpha = 0^\circ$ -ba.

Jelölje a gerenda rövidebb élhosszát D . K helyett elegendő a $k = \frac{K}{D}$ relatív erőkart vizsgálni. $k_r(\alpha)$ függvény meghatározása a $D = 1$ helyettesítéssel egyszerű.

Tekintsük a 9. ábrát! Határozzuk meg a vízbe lógó trapéz alakú rész tömegközéppontjának vízszintes koordinátáját. Ehhez felosztjuk a trapézt két háromszögre. A háromszögek területét jelölje T_1 és T_2 . Egy háromszög tömegközéppontjának helyvektora a csúcsaiba mutató helyvektorok átlaga. Jelölje a 9. ábra szerint a trapéz csúcsait A, B, C, D , és ezen pontok vízszintes koordinátáit jelölje a, b, c, d . Az AC él hosszát jelölje p , a BD él hosszát jelölje q . A háromszögek területe

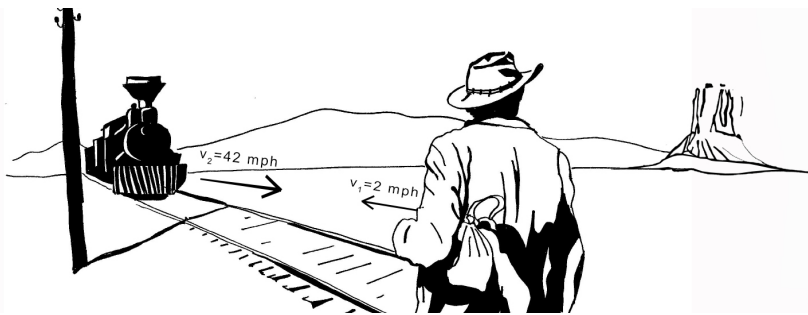
$$T_1 = \frac{p}{2} \quad \text{és} \quad T_2 = \frac{q}{2}. \quad (5)$$

A tömegközéppontok vízszintes koordinátája:

$$x_1 = \frac{a + b + c}{3} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{b + c + d}{3}. \quad (6)$$

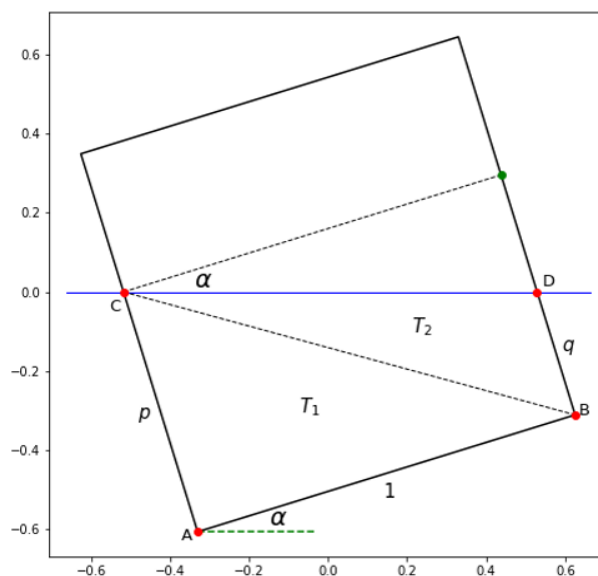
Az a, b, c, d koordinátákat a 9. ábráról olvashatjuk le:

$$a = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2}, \quad b = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2}, \quad c = a - p \sin \alpha, \quad d = b - q \sin \alpha. \quad (7)$$



A T_1, x_1, T_2, x_2 mennyiségek függvényében a relatív erőkar:

$$k = \frac{T_1 x_1 + T_2 x_2}{T_1 + T_2}. \quad (8)$$



9. ábra. Geometriai elrendezés.

Már csak p -t és q -t kell megadni, mint r és α függvénye. A 9. ábra alapján:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p+q}{2} = r \\ p - q = \tan \alpha \end{array} \right\} \rightarrow p = r + \frac{\tan \alpha}{2}, \quad q = r - \frac{\tan \alpha}{2}. \quad (9)$$

Hosszas számolás után az (5)-ös, (6)-os, (7)-es és (9)-es egyenletek (8)-ba való helyettesítése után:

$$k_r(\alpha) = -\frac{\sin \alpha}{2r} \left[r^2 - r + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{\tan^2 \alpha}{2} \right) \right]. \quad (10)$$

0° stabil, ha $k_r(\alpha)$ szigorúan monoton csökkenően metszi az α tengelyt 0° -ban.

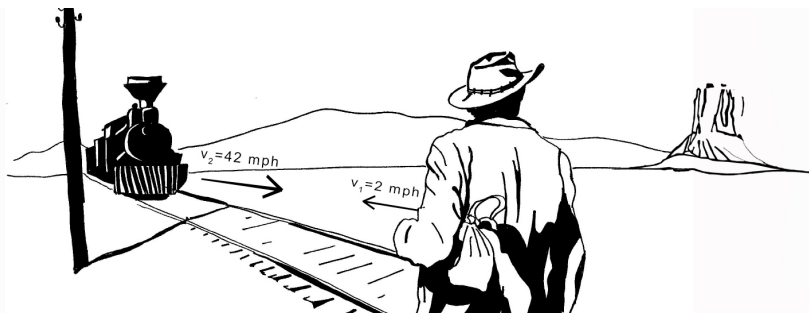
Ha

$$r^2 - r + \frac{1}{6} = 0,$$

akkor

$$k_r(\alpha) = -\sin \alpha \cdot \frac{\tan^2 \alpha}{24r},$$

ami monoton csökkenően metszi az $\alpha = 0^\circ$ -ot.



$$0 < r^2 - r + \frac{1}{6}$$

esetén a (10)-es egyenletben a szögletes zárójelben álló kifejezés mindig pozitív, ekkor is monoton csökkenően metszi $k_r(\alpha)$ a 0° -ot. Tehát a 0° -os orientáció akkor stabil, ha

$$0 \leq r^2 - r + \frac{1}{6},$$

ami

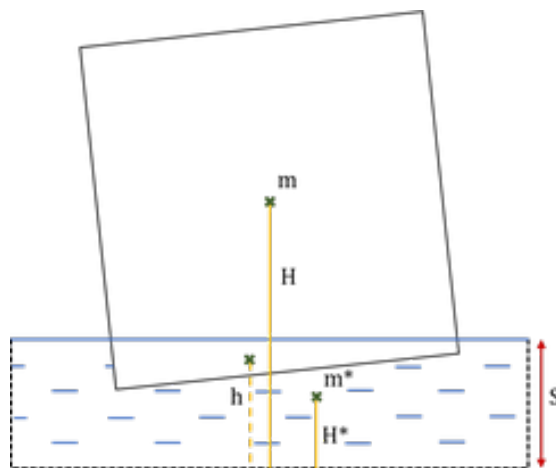
$$0 < r \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}} \leq r < 1$$

esetén teljesül.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0.2113, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0.7887$$

Teljes potenciális energia vizsgálata

Az energiaminimum elve alapján is megoldható a feladat. Amikor fel akarjuk írni a rendszer egészének potenciális energiáját, akkor a víz helyzeti energiáját is figyelembe kell venni. Vizsgáljuk a gerenda potenciális energiáját egy medencében! (ld. 10. ábra)



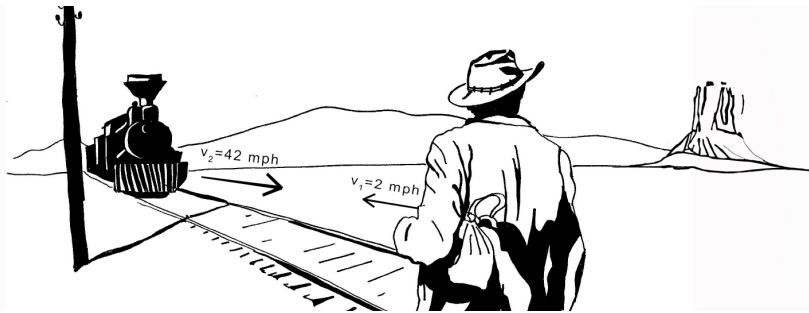
10. ábra. m a rönk tömege és H a rönk tömegközéppontjának magassága. m^* a víz tömege és H^* a víz tömegközéppontjának magassága. H' változik a gerenda elfordulásával, a vízszint maga nem. A medence mélysége S , ha benne van a rönk.

A rendszer potenciális energiája:

$$E = mgH + m^*gH^* + C. \quad (11)$$

A potenciális energiához hozzáadható egy C konstans. Jelölje h a rönk vízbe lógó részének tömegközéppontjának magasságát. A (11)-es egyenletet kicsit átalakítva

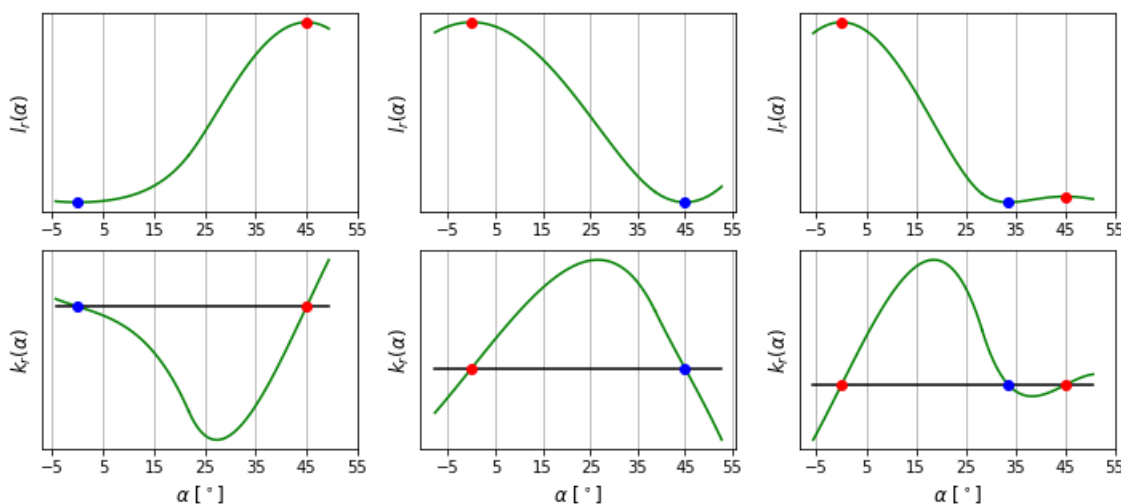
$$E = (mgH - mgh) + (m^*gH^* + mgh) + C.$$



Itt mgh annak a vízrétegnek a potenciális energiája, amivel ki tudnánk tölteni a gerenda vízbe lógó térfogatát. Az $(m^*gH^* + mgh)$ tag egy állandó, válasszuk az értékét $-C$ -nek, amivel

$$E = mg(H - h). \quad (12)$$

A potenciális energia arányos a gerenda egészének és a vízben levő részének tömegközéppontjainak magasságkülönbségével. Használjunk megint relatív mennyiséget, a relatív magasságkülönbség $l = \frac{H-h}{D}$.

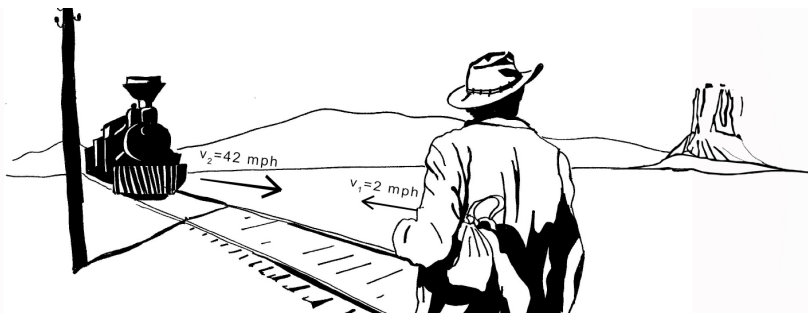


11. ábra. Stabil egyensúlyi helyzetben a potenciális energiának, így $l_r(\alpha)$ -nak is minimuma van. Instabil egyensúlyban pedig maximuma van $l_r(\alpha)$ -nak. Érdekes összehasonlítani az $l_r(\alpha)$ és a $k_r(\alpha)$ függvényeket. Belátható, hogy $\partial_\alpha l_r(\alpha) = -k_r(\alpha)$.

Ha a gerendának két éle van a víz alatt, akkor:

$$l_r(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{2r} \left[r - r^2 + \frac{\tan^2 \alpha}{12} \right].$$

Ezt a a 9. ábráról olvashatjuk le geometriai megfontolások alapján. Differenciálszámítással $l_r(\alpha)$ kifejezéséből visszakaphatjuk ugyanazt az eredményt, amit az előző szakaszban kaptunk.



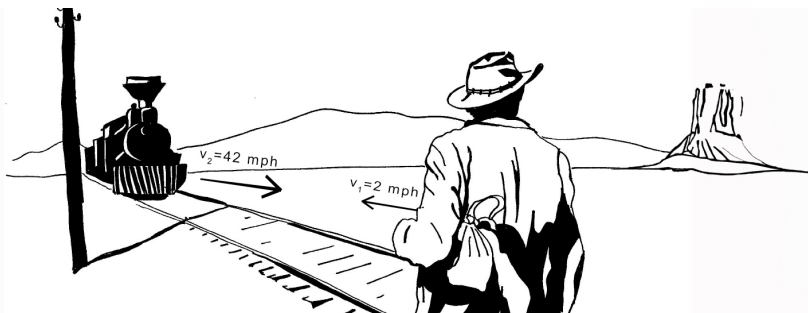
A teljes stabilitásvizsgálat eredményei

A gerenda vízbe lógó éleinek n száma szerint különböző a feladat geometriája, így az $l_r(\alpha)$ és $k_r(\alpha)$ függvények függenek n -től. Ezeket a következő táblázatban foglaltuk össze.

n	$l_r(\alpha)$	$k_r(\alpha)$	
1	$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2r}{\tan \alpha}} \sin \alpha$	$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2r}{\tan \alpha}} \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}$	$\beta(r) \leq \alpha \leq 90^\circ - \beta(r)$
2	$\frac{\cos \alpha}{2r} \left[r - r^2 + \frac{\tan^2 \alpha}{12} \right]$	$-\frac{\sin \alpha}{2r} \left[r^2 - r + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{\tan^2 \alpha}{2} \right) \right]$	$-\beta(r) \leq \alpha \leq \beta(r)$
3	$\frac{1-r}{r} \left\{ \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2} - \frac{2}{3} \sqrt{2 \frac{1-r}{\tan \alpha}} \sin \alpha \right\}$	$-\frac{1-r}{r} \left\{ \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{2 \frac{1-r}{\tan \alpha}} \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \right\}$	$\beta(r) \leq \alpha \leq 90^\circ - \beta(r)$

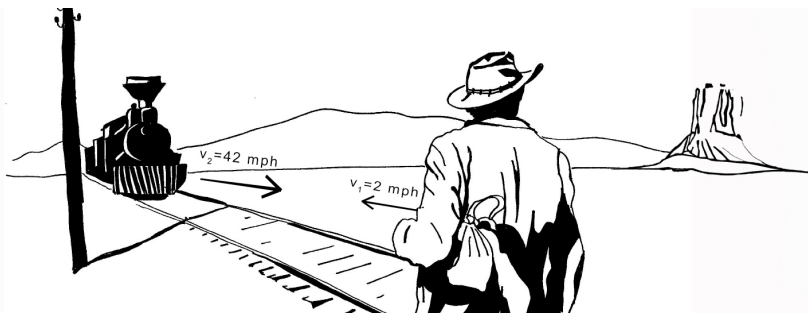
Itt β az a dőlésszög, amikor váltás van a különböző esetek között, mert egy él kiemelkedik, vagy bebukik a vízbe.

$$\tan \beta(r) = \begin{cases} 2r, & \text{ha } 0 < r \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-r), & \text{ha } \frac{1}{2} \leq r < 1. \end{cases}$$

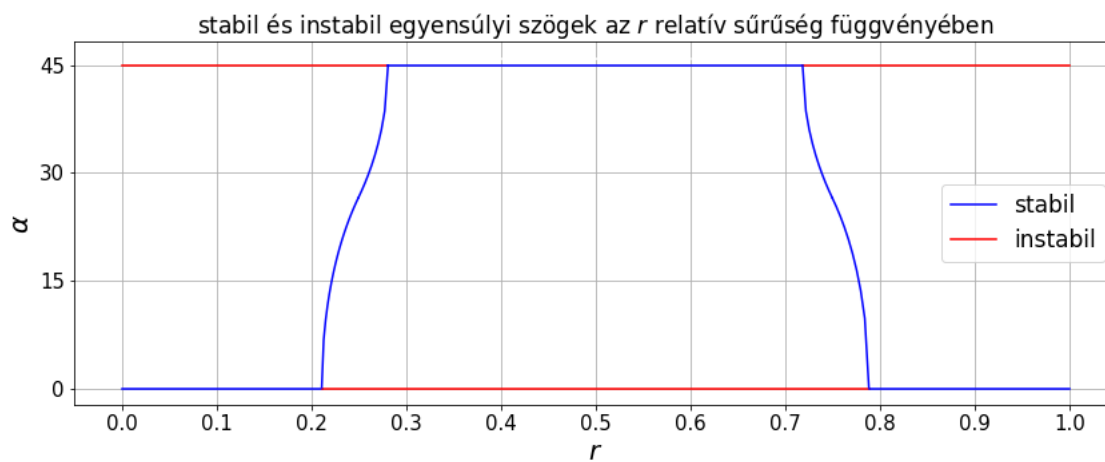


Egy adott r esetén mik a stabil és instabil egyensúlyi α szögek? Ezt a kérdést a $k_r(\alpha) = 0$ egyenlet megoldásával válaszolhatjuk meg. Ennek összefoglaló táblázata az alábbi:

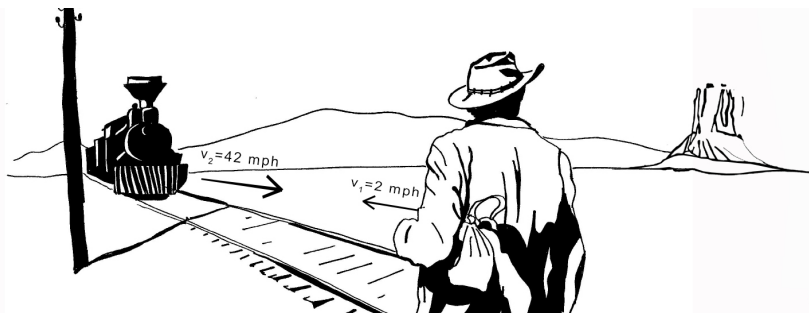
$0 < r \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}$	0°	stabil
	45°	instabil
$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}} < r \leq \frac{1}{4}$	0°	instabil
	$\alpha = \arctan \sqrt{2[6(r - r^2) - 1]}$	stabil
$\frac{1}{4} \leq r < \frac{9}{32}$	45°	instabil
	$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{16r}{9-16r} \right)$	stabil
$\frac{9}{32} \leq r \leq \frac{23}{32}$	0°	instabil
	45°	stabil
$\frac{23}{32} < r \leq \frac{3}{4}$	0°	instabil
	$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{16-16r}{16r-7} \right)$	stabil
$\frac{3}{4} \leq r < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}$	45°	instabil
	$\alpha = \arctan \sqrt{2[6(r - r^2) - 1]}$	stabil
$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}} \leq r < 1$	0°	stabil
	45°	instabil



Érdemes ábrázolni is a kapott eredményeket:

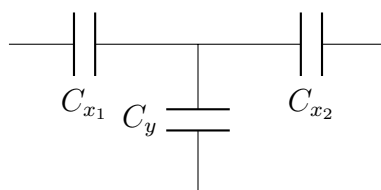


12. ábra. Stabil és instabil egyensúlyi helyzetek α függvényében. Két olyan sűrűség intervallum is van, ami esetén 0° és 45° között áll be stabilan a gerenda.



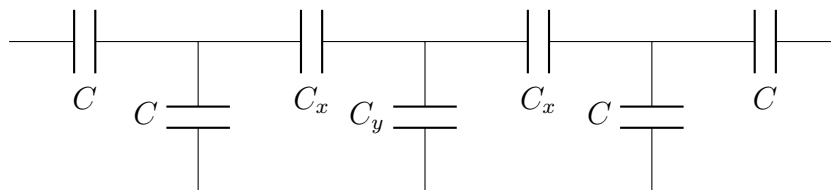
3. Feladat

A feladat szövegének megfelelően jelöljük a kondenzátorok kapacitását C -vel. Vegyük észre, hogy helyettesíthetjük a teljes kapcsolást az alábbi „T”-elrendezéssel, hasonlóan, mint ahogy ellenállások esetén szokás. Ezt mutatja a 13. ábra.



13. ábra. A végtelen kapcsolást helyettesítő „T”-elrendezés.

Itt bevezettük a C_{x_1} és C_{x_2} jelölést, amelyekre a szimmetria folytán teljesül, hogy $C_{x_1} = C_{x_2}$. A továbbiakban jelöljük ezeket C_x -szel. Kapcsoljunk szimmetrikusan a fentebbi elrendezés két széléhez C kapacitású kondenzátorokat a 14. ábrán látható módon. Ezen elrendezés eredő kapacitása megegyezik az eredeti helyettesítő kapcsolással, mivel ha egy végtelen lánchoz hozzákapcsolunk a fenti módon 2-2 kondenzátort, az elrendezés nem változik.



14. ábra. A szimmetrikusan kiegészített „T”-elrendezés.

Tehát a 13. és 14. ábrákon látható kapcsolások eredő kapacitása egyaránt $C_x/2$. Másrészt, a 14. ábra szimmetriájából adódóan a C_y kondenzátor két végpontja ekvipotenciális, tehát e pontokat rövidegre zárhatjuk, vagy akár ki is vehetjük a közójük kapcsolt kondenzátort. Összefoglalva, felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{2}{C_x} = \frac{2}{C} + \frac{2}{C_x + C}.$$

Némi átalakítással egy másodfokú egyenletet kapunk C_x -re:

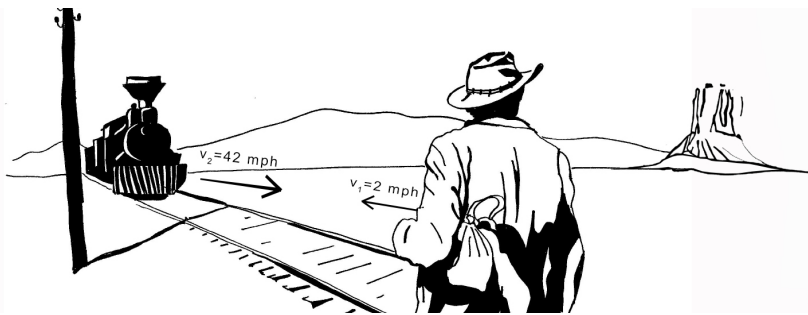
$$\frac{2}{C}C_x^2 + 2C_x - 2C = 0.$$

Ennek matematikai megoldásai:

$$C_x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\frac{2}{C}2C}}{2\frac{2}{C}} = \frac{C}{2}(-1 \pm \sqrt{5}),$$

amelyek közül csak a pozitív fizikai megoldás. Innen végül a kondenzátorokból álló elrendezés ellenállása az A és B kivezetések között:

$$C_e = \frac{C_x}{2} = \frac{C}{4}(-1 + \sqrt{5}).$$



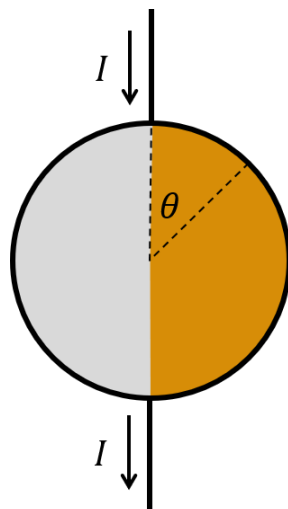
4. Feladat

(a)

Képzeljünk el első körben egy állandó σ fajlagos vezetőképességű gömböt, amelybe a feladattal analóg módon áramot vezetünk. Ekkor az elrendezés forgásszimmetriájából adódóan az áramvonalak a főkörök mentén fognak húzódni. Ha félbevágjuk a gömböt az egyik ilyen főkör mentén, akkor a töltéshordozók mozgása nem változik meg: a töltések eddig sem és ezután sem lépnek át egy-egy főkör vonalán. Ha ezután a két félgömböt eltávolítjuk egymástól, a töltéshordozók mozgása a félgömbök elektromos semlegessége folytán továbbra sem változik.

Ebből adódóan ha I_1 áramot vezetünk be és ki egy σ_1 fajlagos vezetőképességű félgömb átellenes pontjain, akkor az áramvonalak szintén főkörök lesznek. Hasonló a helyzet, ha I_2 áramot vezetünk be egy σ_2 fajlagos vezetőképességű félgömbbe. A két esetet szuperponálva $I = I_1 + I_2$ feltétel mellett megkapjuk a feladatban vázolt rendszert.

(b) - első megoldás



15. ábra. A rendszer oldalnézetben, a θ szöget jelölve.

Az áramsűrűség nagysága adott θ szöggel jelölt helyen (ld. 15. ábra) az egyes félgömbökben:

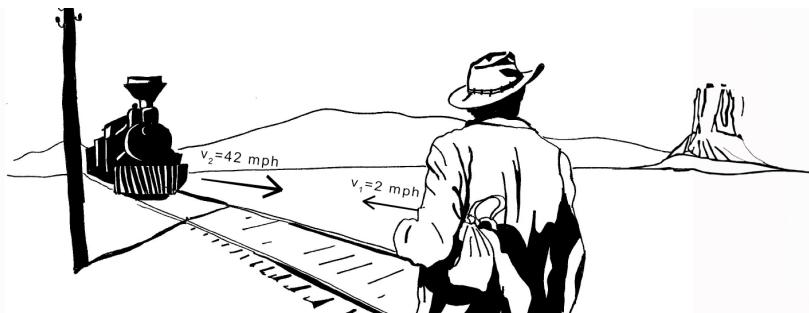
$$|\mathbf{j}_1| = \frac{I_1}{r\delta\pi \sin \theta}, \quad |\mathbf{j}_2| = \frac{I_2}{r\delta\pi \sin \theta}.$$

A $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ differenciális Ohm-törvény alapján ebből megkaphatjuk az elektromos térerősséget:

$$|\mathbf{E}_1| = \frac{I_1}{\sigma_1 r \delta \pi \sin \theta}, \quad |\mathbf{E}_2| = \frac{I_2}{\sigma_2 r \delta \pi \sin \theta}.$$

A két félgömb összeillesztésénél az \mathbf{E}_1 és \mathbf{E}_2 vektorok a határral párhuzamosak, így a Faraday-Lenz-törvényből adódóan a nagyságuknak is meg kell egyeznie:

$$|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| \quad \implies \quad \frac{I_1}{\sigma_1} = \frac{I_2}{\sigma_2}.$$



Ezt az $I_1 + I_2 = I$ feltétellel összevetve az áramok nagysága megkapható:

$$I_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot I, \quad I_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot I.$$

(b) - második megoldás

Mivel az áramvonalak főkörök mentén húzódnak, a berendezés felfogható az egyes félgömbök, mint ellenállások párhuzamos kapcsolásaként. A félgömbök ellenállásait nem ismerjük, de biztos, hogy fordítottan arányosak a fajlagos vezetőképességgel, így:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

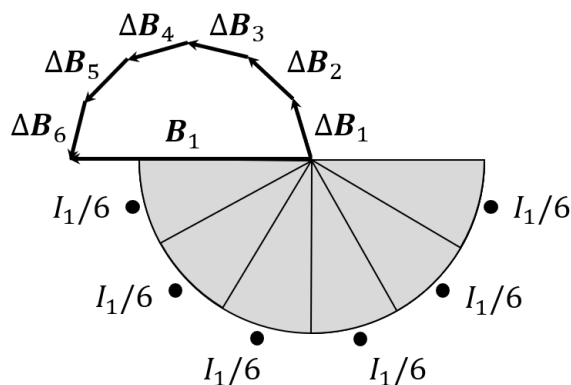
Az áramok aránya innen közvetlenül adódik:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2, \quad I_1 + I_2 = I \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad I_1 + I_2 = I \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot I, \quad I_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot I.$$

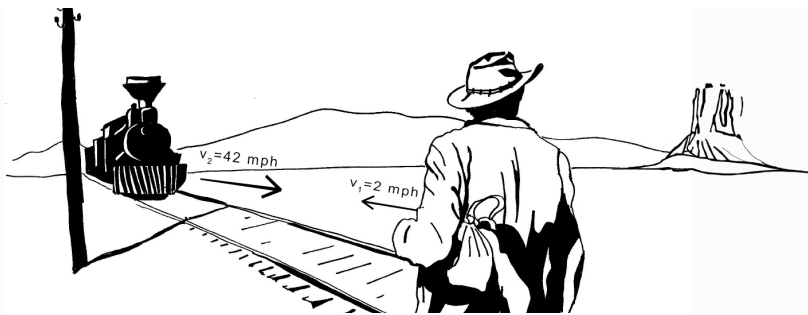
(c)

A mágneses indukcióvektor kiszámításához először érdemes megjegyezni, hogy a két félvég-telen vezeték járuléka nulla (ez a Biot–Savart-törvényből azonnal adódik). Ezután vizsgáljuk meg a σ_1 fajlagos vezetőképességű félgömb járulékát. Ehhez a félgömböt bontsuk fel a 16. ábrán látható módon n darab gömbcikkre, amelyekben mind I_1/n áram folyik (az ábrán $n = 6$). A k -adik gömbcikk járuléka legyen $\Delta \mathbf{B}_k$, ezek összege legyen \mathbf{B}_1 . Az ábráról rögtön leolvasható \mathbf{B}_1 iránya az áram bevezetési irányából szemlélve.



16. ábra. Az egyik félgömb mágneses járuléka, felülnézetből.

A mágneses indukcióvektor nagysága a következő módon kapható meg. A 16. ábrát tekintve láthatjuk, hogy a $\Delta \mathbf{B}_k$ vektorok egy szabályos $2n$ -szög egyik felét rajzolják ki, \mathbf{B} pedig ennek



leghosszabb átlóján fekszik. Ha n végtelenbe tart, akkor egy-egy gömbcikk járuléka egyre jobban közelíti egy félkör alakú vezető mágneses mezejével:

$$|\Delta \mathbf{B}_k| \approx \frac{\mu_0 I_1}{4nr}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\Delta \mathbf{B}_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{\mu_0 I_1}{4nr} \right) = \frac{\mu_0 I_1}{4r}.$$

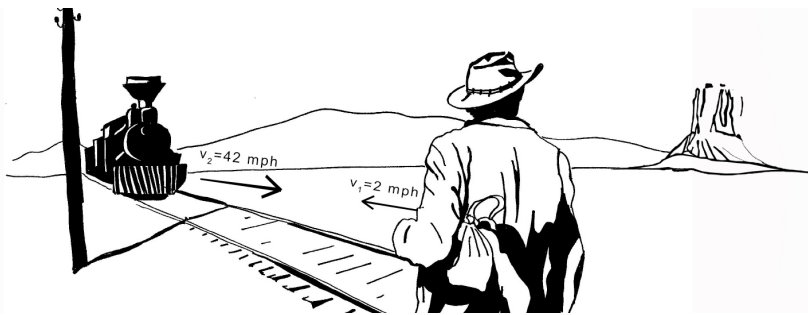
A $|\mathbf{B}_1|$ indukció a félkör kerülete és átmérője közötti arányból számítható:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n |\Delta \mathbf{B}_k|}{|\mathbf{B}_1|} = \frac{\mu_0 I_1}{4r |\mathbf{B}_1|} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{B}_1| = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}.$$

A két félgömb együttes járuléka ennek alapján:

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}_1| - |\mathbf{B}_2| = \frac{\mu_0 (I_1 - I_2)}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}}.$$

A kifejezésből az is látszik, hogy \mathbf{B} iránya függ a vezetőképességek viszonyától. Ha $\sigma_1 > \sigma_2$, akkor a 16. ábrán látható irányú, ha $\sigma_2 > \sigma_1$, akkor ezzel ellentétes.



5. Feladat

Első körben érdemes részletesebben megvizsgálni a Fresnel-formulák matematikai tulajdonságait. A feladatban használt jelölésekkel nézzük meg, mi történik, ha felhasználjuk a fénytörést jellemző Snellius–Descartes-törvényt:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 .$$

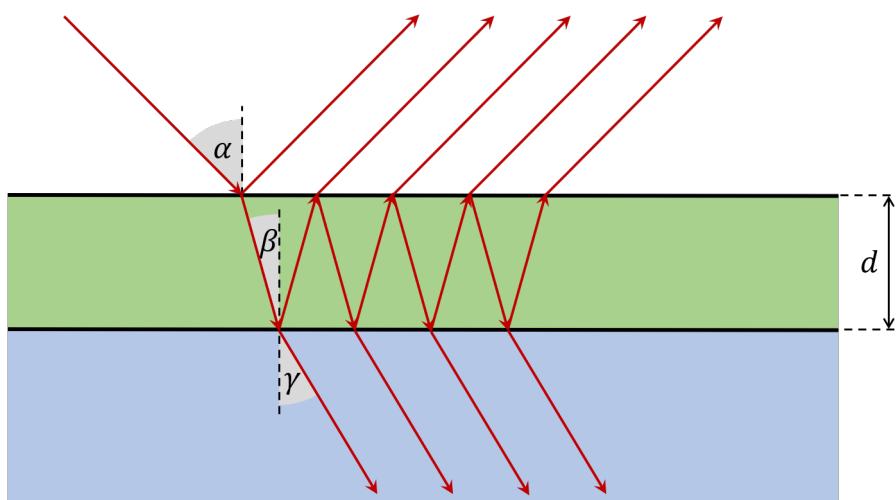
Ezt behelyettesítve a Fresnel-formulákba, némi trigonometriai átalakítás segítségével kifejezhetjük az r és t együtthatókat egyedül a szögekkel:

$$r = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} , \quad t = \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (\text{ha } \alpha_1, \alpha_2 \neq 0) .$$

Ez természetesen merőleges beesés esetén, vagyis $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ mellett nem értelmes, ilyenkor azonban az eredeti formulák a következő alakra egyszerűsödnek:

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} , \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (\text{ha } \alpha_1 = \alpha_2 = 0) .$$

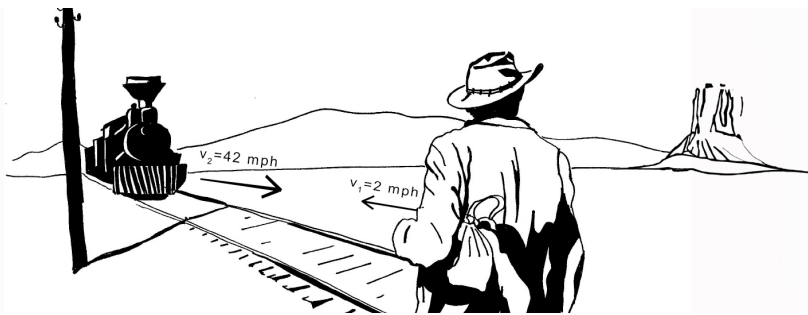
Ezek ismeretében rátérhetünk a feladat megoldására. A probléma kulcsa, hogy észrevegyük: a vékonyrétegben sokszoros törés és visszaverődés valósul meg (ld. 17. ábra). Az ábrának megfelelően a bejövő fénysugár beesési szögét jelöljük α -val, a vékonyrétegbeli terjedést jellemző törési szöget β -val, a hordozóban fellépő törési szöget pedig γ -val.



17. ábra. A bejövő fénysugár vékonyrétegben való terjedése geometriai optikai képben.

A levegő-réteg határon való visszaverődést és törést jellemezhetjük rendre r_1^\downarrow , t_1^\downarrow és r_1^\uparrow , t_1^\uparrow együtthatókkal, ahol a \downarrow és \uparrow indexek azt jelölik, hogy a beeső fénysugár az 17. ábrán fentről lefelé vagy lentől felfelé halad. Hasonlóan a réteg-hordozó határátmenet jellemezhető r_2^\downarrow , t_2^\downarrow és r_2^\uparrow , t_2^\uparrow együtthatókkal. A visszavert fénynyaláb szomszédos sugarai közti optikai úthossz geometriailag kifejezhető:

$$\Delta s = \frac{2n_r d}{\cos \beta} - 2d \cdot \operatorname{tg} \beta \sin \alpha = \frac{2n_r d}{\cos \beta} - 2d \cdot \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta} = 2n_r d \cdot \frac{1 - \sin^2 \beta}{\cos \beta} = 2n_r d \cos \beta .$$



A k -adik visszavert fénysugarat jellemző elektromos térerősséget és mágneses indukciót az egyszerűség kedvéért összefoglalhatjuk egy $\mathbf{F} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ mennyiségben. Ennek értéke egy megfelelően választott időpillanatban, az első visszaverődési ponttól a visszavert nyaláb irányába mért x távolság függvényében a Fresnel-formulák és Δs alapján kifejezhető:

$$\mathbf{F}_1(x) = r_1^\downarrow \mathbf{F}_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad \mathbf{F}_2(x) = t_1^\downarrow r_2^\downarrow t_1^\uparrow \mathbf{F}_0 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta s + x)\right],$$

$$\mathbf{F}_3(x) = t_1^\downarrow r_2^\downarrow r_1^\uparrow r_2^\downarrow t_1^\uparrow \mathbf{F}_0 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(2\Delta s + x)\right], \quad \dots$$

Kompaktabb módon összefoglalva:

$$\mathbf{F}_1(x) = r_1^\downarrow \mathbf{F}_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad \mathbf{F}_l(x) = t_1^\downarrow t_1^\uparrow r_2^\downarrow (r_1^\uparrow r_2^\downarrow)^{l-2} \mathbf{F}_0 \cdot \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}[(l-1)\Delta s + x]\right\} \quad (l \geq 2).$$

A teljes visszavert fénynyaláb amplitúdója az egyes visszavert fénysugarak amplitúdóinak összegéből adódik, amely némi átalakítás után:

$$\mathbf{F}(x) = r_1^\downarrow \mathbf{F}_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) + t_1^\downarrow t_1^\uparrow r_2^\downarrow \mathbf{F}_0 \cdot \left\{ \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (r_1^\uparrow r_2^\downarrow)^k \cos\left[\frac{2\pi \Delta s}{\lambda}(k+1)\right] + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (r_1^\uparrow r_2^\downarrow)^k \sin\left[\frac{2\pi \Delta s}{\lambda}(k+1)\right] \right\}.$$

A kifejezésben szereplő numerikus sorokra bevezethetjük az $S_1(\Delta s, r_1^\uparrow r_2^\downarrow)$ és $S_2(\Delta s, r_1^\uparrow r_2^\downarrow)$ jelöléseket. Ezek általános esetben csak komplex algebrai ismeretekkel számíthatóak ki, azonban a feladat során erre nincs szükség, csak speciális esetekben kell megvizsgálnunk. Tekintsük át ezeket!

(a)

Az első esetben $n_1 = 1$, $n_r = 2$, $n_h = 3$, $\alpha = 0^\circ$, $d = \lambda/4$. Azonnal látható, hogy a Snellius–Descartes-törvény értelmében $\beta = \gamma = 0^\circ$, továbbá a Fresnel-formulák merőleges beesésre érvényes alakjából:

$$r_1^\downarrow = -1/3, \quad t_1^\downarrow = 2/3, \quad r_1^\uparrow = 1/3, \quad t_1^\uparrow = 4/3,$$

$$r_2^\downarrow = -1/5, \quad t_2^\downarrow = 4/5, \quad r_2^\uparrow = 1/5, \quad t_2^\uparrow = 6/5.$$

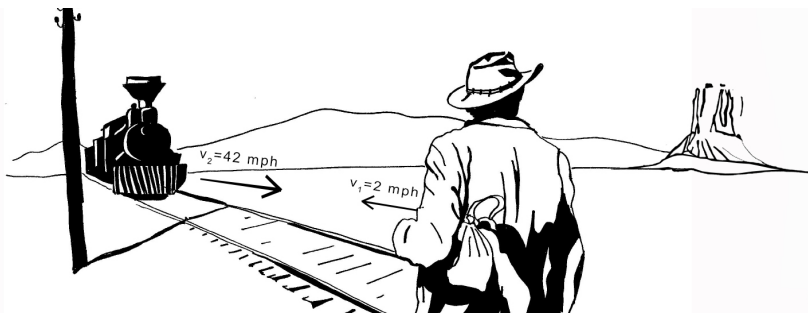
A Δs optikai útkülönbség ekkor:

$$\Delta s = 2n_r d \cos \beta = \lambda.$$

Az S_1 numerikus sor ebben az esetben mértani sorra egyszerűsödik, az S_2 sor nulla:

$$\cos\left[\frac{2\pi \Delta s}{\lambda}(k+1)\right] = \cos[2\pi(k+1)] = 1 \implies S_1(\lambda, q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$$

$$\sin\left[\frac{2\pi \Delta s}{\lambda}(k+1)\right] = \sin[2\pi(k+1)] = 0 \implies S_2(\lambda, q) = 0.$$



Az elektromágneses térerősség helyfüggése ezek alapján:

$$\mathbf{F}(x) = \left[r_1^\downarrow + \frac{t_1^\downarrow t_1^\uparrow r_2^\downarrow}{1 - r_1^\uparrow r_2^\downarrow} \right] \mathbf{F}_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

A reflektált nyaláb intenzitása innen leolvasható (a feladat szerint $|\mathbf{F}_0|^2$ egységnyi):

$$R = \left(r_1^\downarrow + \frac{t_1^\downarrow t_1^\uparrow r_2^\downarrow}{1 - r_1^\uparrow r_2^\downarrow} \right)^2 = 1/4.$$

(c)

A harmadik esetben $n_1 = 1$, $n_r = 2$, $n_h = 4$, $\alpha = 0^\circ$, $d = \lambda/8$, ez az elsőhöz hasonló, ismét igaz, hogy $\beta = \gamma = 0^\circ$. A Fresnel-formulák alapján:

$$\begin{aligned} r_1^\downarrow &= -1/3, & t_1^\downarrow &= 2/3, & r_1^\uparrow &= 1/3, & t_1^\uparrow &= 4/3, \\ r_2^\downarrow &= -1/3, & t_2^\downarrow &= 2/3, & r_2^\uparrow &= 1/3, & t_2^\uparrow &= 4/3. \end{aligned}$$

A Δs optikai úthossz némiképp módosul:

$$\Delta s = 2n_r d \cos \beta = \lambda/2.$$

Az S_1 és S_2 sorok értéke ekkor:

$$\begin{aligned} \cos\left[\frac{2\pi\Delta s}{\lambda}(k+1)\right] &= \cos[\pi(k+1)] = (-1)^{k+1} \implies S_1(\lambda, q) = -\sum_{k=0}^{\infty} (-q)^k = \frac{-1}{1+q}, \\ \sin\left[\frac{2\pi\Delta s}{\lambda}(k+1)\right] &= \sin[\pi(k+1)] = 0 \implies S_2(\lambda, q) = 0. \end{aligned}$$

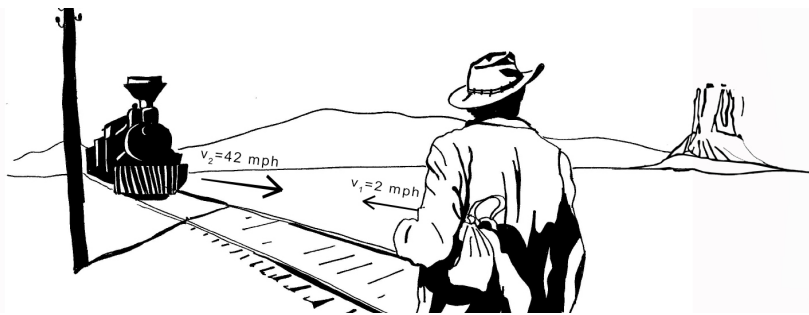
Az elektromágneses térerősségre ekkor mindent behelyettesítve nullvektor adódik:

$$\mathbf{F}(x) = \left[r_1^\downarrow - \frac{t_1^\downarrow t_1^\uparrow r_2^\downarrow}{1 + r_1^\uparrow r_2^\downarrow} \right] \mathbf{F}_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \mathbf{0}.$$

A reflektált nyaláb intenzitása tehát valóban nulla:

$$R = 0.$$

Ezzel az állítást beláttuk.



Megjegyzések

A kitűzött feladatban szereplő második esetben az $n_l = 1$, $n_r = \sqrt{3}$, $n_h = \sqrt{3/2}$, $\alpha = 60^\circ$, $d = \lambda/16$ adatok szerepeltek, ekkor azonban az intenzitás kiszámítása rendkívül bonyolult. A közölt adatok szervezői hiba eredményei voltak, nem ilyen módon kívántuk kitézni a (b) feladatrészt, ezért ezúton is elnézést kérünk.

Mindenesetre érdemes megvizsgálni a (b) feladatrész kissé módosított változatát: legyen $d = \lambda/2$, a többi adat pedig az eredetivel megegyező! Ekkor a Snellius–Descartes-törvényből adódik, hogy $\beta = 30^\circ$ és $\gamma = 45^\circ$, a Fresnel-formulák szögekkel kifejezett alakjából pedig:

$$r_1^\downarrow = -1/2, \quad t_1^\downarrow = 1/2, \quad r_1^\uparrow = 1/2, \quad t_1^\uparrow = 3/2,$$

$$r_2^\downarrow = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}, \quad t_2^\downarrow = \frac{6}{3 + \sqrt{3}}, \quad r_2^\uparrow = \frac{\sqrt{3} - 3}{3 + \sqrt{3}}, \quad t_2^\uparrow = \frac{2\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}.$$

A Δs optikai úthossz ekkor:

$$\Delta s = 2n_r d \cos \beta = 3\lambda/2.$$

Eszerint az S_1 és S_2 sorok értéke formálisan megegyezik a (c) esetben tárgyalttal, így a végeredmény is hasonló (természetesen különböző r és t együtthatókkal):

$$\mathbf{F}(x) = \left[r_1^\downarrow - \frac{t_1^\downarrow t_1^\uparrow r_2^\downarrow}{1 + r_1^\uparrow r_2^\downarrow} \right] \mathbf{F}_0 \cdot \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right).$$

A reflektált nyaláb intenzitása ekkor:

$$R = \left(r_1^\downarrow - \frac{t_1^\downarrow t_1^\uparrow r_2^\downarrow}{1 + r_1^\uparrow r_2^\downarrow} \right)^2 = 0,459.$$

Hasonlóan a $d = \lambda/16$ eset is megoldható, ugyanakkor az S_1 és S_2 sorok kiszámítása, és ezáltal a feladat megoldása jóval több munkát igényel.