
# Feladatok

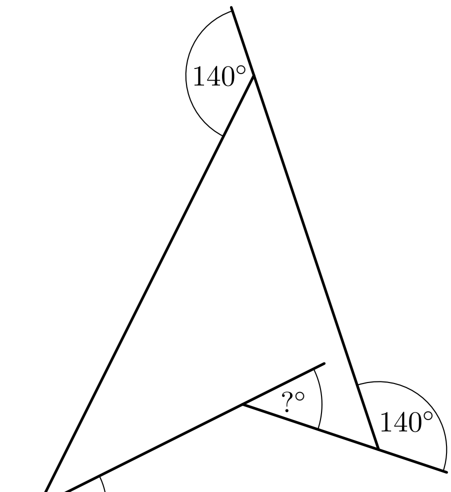
## C kategória

**C-1.** Timi kiegészítette az alábbi táblázatot az $1, 2, 3, 4$ számokkal úgy, hogy minden oszlopba és minden sorba minden számból pontosan egy került. Milyen szám kerülhetett $x$ helyére?

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 1 |
| | 2 | | |
| | | x | |
| 1 | | | 4 |

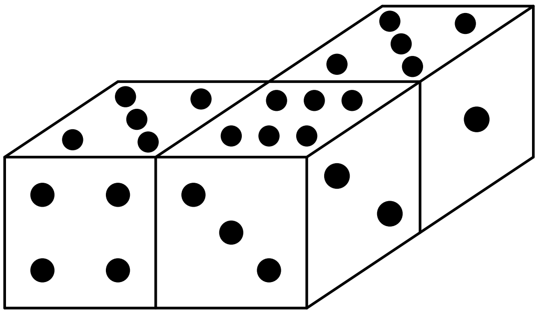
(3 pont)

**C-2.** Hány fokos az ábrán ?-lel jelölt szög?




(3 pont)

**C-3.** Mennyi az alábbi három szabályos dobókocka ábrán nem látható oldalain szereplő számok összege?
*Megjegyzés: A dobókockán a számok 1-től 6-ig szerepelnek.*



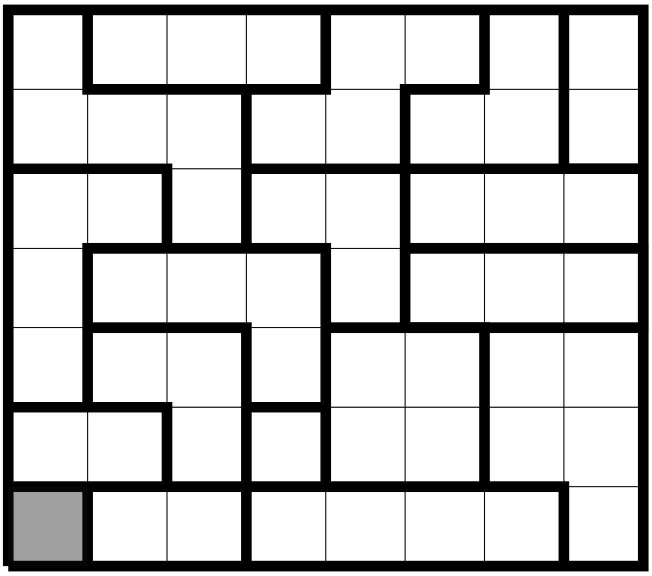
(4 pont)

**C-4.** Kartal, Tarkal, Lartak és Raltak egy baráti társaság tagjai. Szeretnének új barátokat szerezni, de csak olyan emberekkel hajlandóak találkozni, akiknek a neve a KARTAL szóból a mássalhangzók felcserélésével megkapható. Legfeljebb hány új barátjuk lehet, ha egy keresztnevű emberből csak egy lehet a baráti körben? (4 pont)

**C-5.** Nagymama 91 sütit sütött és egyenlően elosztotta unokái között. Nagypapa búskomoran tapasztalta, hogy egy árva süti sem jutott neki. Hány sütit kapott egy unoka, ha tudjuk, hogy Anna még csak a második sütit ette, amikor Tomika már a 9-ediket is bezabálta? (4 pont)

**C-6.** A 2020 egy olyan szám, amelyben a számjegyek száma, a számjegyek összege és a nemnulla számjegyek szorzata (abban az esetben, ha csak egy ilyen van, akkor maga a számjegy) megegyezik. Hány ilyen 2020-nál kisebb pozitív egész szám van? (5 pont)


**C-7.** Egy robot az alábbi tábla bal alsó mezőjéből indult el egyenesen felfelé. Minden mezőn vagy továbbment egyenesen vagy elkanyarodott valamelyik irányba 90 fokkal. A robot akkor állt meg, amikor visszaért a kiindulási mezőre. Hányszor kanyarodott az útja során, ha tudjuk, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépett rá, és minden vastag vonallal körbevett területre pontosan egyszer lépett be?



(5 pont)

**C-8.** Egy család (anyuka, apuka, nagymama, kisfiú, kislány) utazik egy 5 fős személyautóban. Vezetni csak anyuka és apuka tud. A kocsiban a gyerekek nem ülhetnek elöl, valamint apuka nem szeretne nagymama mellé ülni. Hányféleképpen helyezkedhetnek el a kocsiban? *Egy kocsiban elöl 2 hely, hátul 3 hely van, és két hely akkor szomszédos, ha azonos sorban egymás mellett vannak.* (6 pont)

**C-9.** Gábor felírt néhány háromjegyű számot növekvő sorrendben úgy, hogy azok számjegyeinek összegei szigorúan csökkenő sorrendben legyenek. Legfeljebb hány számot írhatott fel Gábor?

(6 pont)

**C-10. Játék:** Egy $8 \times 8$-as tábla egyik mezőjére elhelyezünk egy bástyát. A két játékos felváltva léphet a bástyával. Egy lépésben vagy jobbra lehet akármennyit lépni, vagy lefelé lehet akármennyit lépni. Az a játékos nyer, aki a jobb alsó mezőre lép a bástyával.
*Győzzétek le a gépet kétszer egymás után ebben a játékban! A kezdő helyzet ismeretében Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.* (12 pont)


**Megoldókulcs:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| C-1. | 4 | C-4. | 20 | C-7. | 35 |
| C-2. | 60 | C-5. | 13 | C-8. | 18 |
| C-3. | 37 | C-6. | 4 | C-9. | 14 |

## D kategória

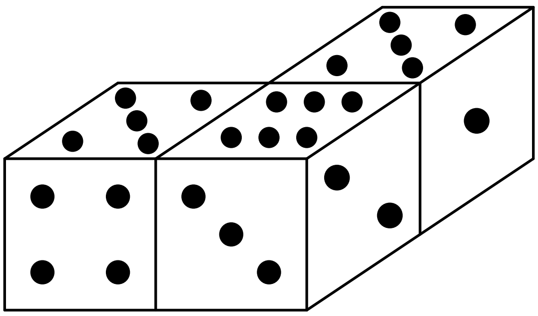
**D-1.** Timi kiegészítette az alábbi táblázatot az $0, 1, 2, 3, 4$ számokkal úgy, hogy minden oszlopba és minden sorba minden számból pontosan egy került. Milyen szám kerülhetett $x$ helyére?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | | x | |
| | 2 | 0 | | |
| | | 1 | 0 | |
| | | | 2 | 4 |
| 1 | 4 | | | |

(3 pont)

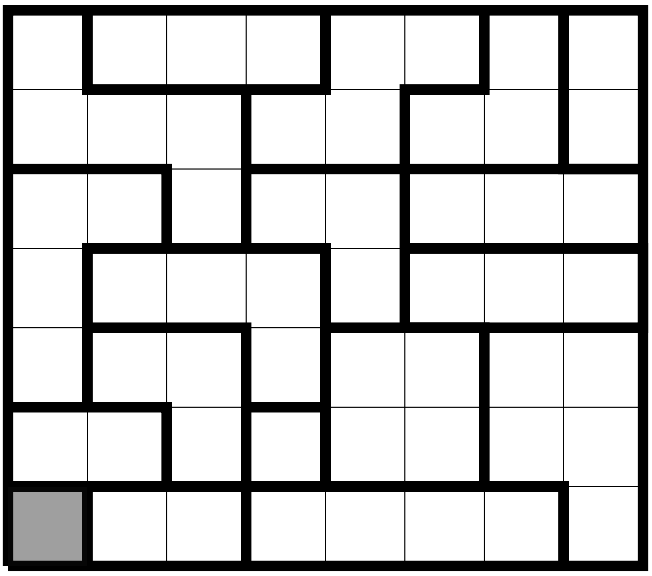
**D-2.** Kartal, Tarkal, Lartak és Raltak egy baráti társaság tagjai. Szeretnének új barátokat szerezni, de csak olyan emberekkel hajlandóak találkozni, akiknek a neve a KARTAL szóból a mássalhangzók felcserélésével megkapható. Legfeljebb hány új barátjuk lehet, ha egy keresztnevű emberből csak egy lehet a baráti körben? (3 pont)

**D-3.** Mennyi az alábbi három szabályos dobókocka ábrán nem látható oldalain szereplő számok összege?
*Megjegyzés: A dobókockán a számok 1-től 6-ig szerepelnek.*



(4 pont)

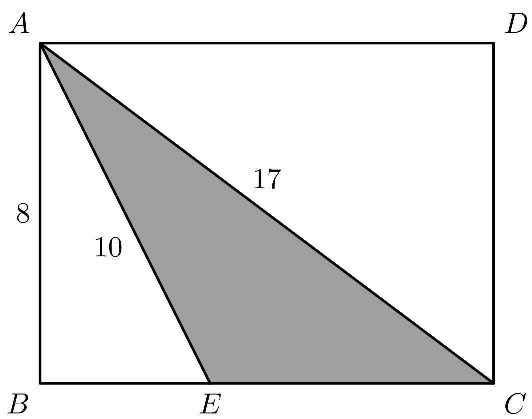
**D-4.** Egy robot az alábbi tábla bal alsó mezőjéből indult el egyenesen felfelé. Minden mezőn vagy továbbment egyenesen vagy elkanyarodott valamelyik irányba 90 fokkal. A robot akkor állt meg, amikor visszaért a kiindulási mezőre. Hányszor kanyarodott az útja során, ha tudjuk, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépett rá, és minden vastag vonallal körbevett területre pontosan egyszer lépett be?



(4 pont)

**D-5.** Ákos rendelt egy adag csirkefalatot és hagymakarikát. Hiába kérte külön, egy dobozba öntötték össze, ezért mérgében megette a csirkefalatok ötödét. Így másfélszer annyi hagymakarika maradt, mint csirkefalat. Ezután Kristóf megevett 44 hagymakarikát, mert aznap már nem akart emberek közé menni. Így már csak $\frac{2}{5}$-ször annyi hagymakarika volt, mint csirkefalat. Hány darab csirkefalatot és hagymakarikát rendelt összesen Ákos? (4 pont)

**D-6.** Az $ABCD$ téglalap $AB$ oldala 8 egység, $AC$ átlójának hossza pedig 17 egység. A $BC$ oldal egy belső pontja $E$. Hány területegység az $AEC$ háromszög területe, ha tudjuk, hogy az $AE$ szakasz 10 egység hosszú?



(5 pont)

**D-7.** Mint az közismert, Süsünek, a sárkánynak csak egy feje van, ám öt testvérének mindegyikének több is. Süsü testvérei egy nap körbeülnek egy nagy asztalt és minden sárkány szóvivő feje közli a többiekkel, hogy nekik átlagosan hány fejük van. A következő mondatok hangzanak el:

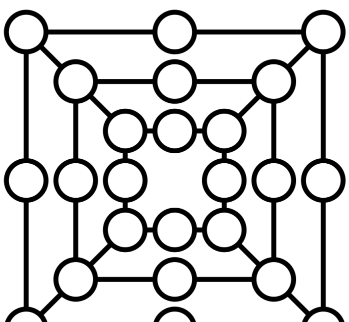
- Nektek átlagosan 7 fejetek van.
- Nektek átlagosan 9 fejetek van.
- Nektek átlagosan 8 fejetek van.
- Nektek átlagosan 8 fejetek van.
- Nektek átlagosan 9 fejetek van.

Hány feje van összesen Süsü öt testvérének? (5 pont)

**D-8.** Marvin kirakott két pozitív egész számot úgy, hogy közben csak kétféle számjegykártyát használt. Hányféleképpen tudta ezt megtenni, ha tudjuk, hogy a két szám összege 10000?
*Megjegyzés: A két szám felcserélése nem számít külön esetnek.* (6 pont)

**D-9.** Dávid 9 négyzetből összerakott egy nagyobb téglalapot. Hány egység hosszú a téglalap rövidebbik oldala, ha a négyzetek oldalhosszai rendre $1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15$ és $18$ egység? (6 pont)

**D-10.** **Játék:** Adott az ábrán látható módosított malom pálya. A két játékos felváltva helyez le piros és kék korongokat a táblára. (Olyan mezőre nem rakhattok korongot, ahol már van valamilyen színű korong.) Az a játékos nyer, akinek először összegyűlik három egy vonalban lévő szomszédos korong. Ha már minden mezőn szerepel korong, de egyik színű korongból sincs három szomszédos, melyek egy vonalban helyezkednek el, akkor a második játékos nyer.
*Győzzétek le a gépet kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.*



(12 pont)



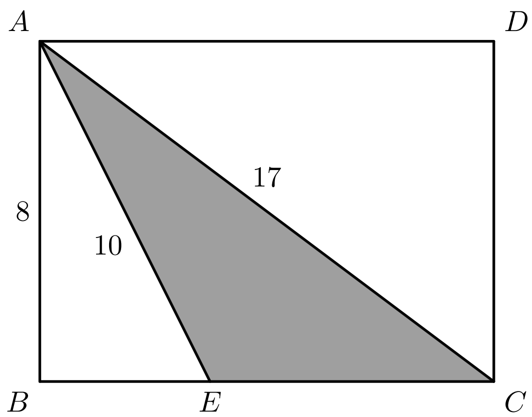

**Megoldókulcs:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| D-1. | 1 | D-4. | 35 | D-7. | 41 |
| D-2. | 20 | D-5. | 110 | D-8. | 8 |
| D-3. | 37 | D-6. | 36 | D-9. | 32 |

## E kategória

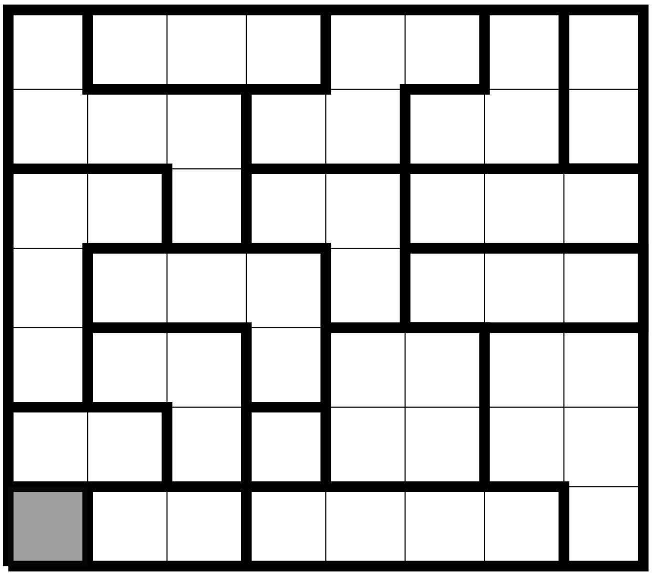
**E-1.** Nagymama 91 sütit sütött és egyenlően elosztotta unokái között. Nagypapa búskomoran tapasztalta, hogy egy árva süti sem jutott neki. Hány sütit kapott egy unoka, ha tudjuk, hogy Anna még csak a második sütit ette, amikor Tomika már a 9-ediket is bezabálta? (3 pont)

**E-2.** Az $ABCD$ téglalap $AB$ oldala 8 egység, $AC$ átlójának hossza pedig 17 egység. A $BC$ oldal egy belső pontja $E$. Hány területegység az $AEC$ háromszög területe, ha tudjuk, hogy az $AE$ szakasz 10 egység hosszú?




(3 pont)


**E-3.** Egy robot az alábbi tábla bal alsó mezőjéből indult el egyenesen felfelé. Minden mezőn vagy továbbment egyenesen vagy elkanyarodott valamelyik irányba 90 fokkal. A robot akkor állt meg, amikor visszaért a kiindulási mezőre. Hányszor kanyarodott az útja során, ha tudjuk, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépett rá, és minden vastag vonallal körbevett területre pontosan egyszer lépett be?



(4 pont)

**E-4.** Egy család (anyuka, apuka, nagymama, kisfiú, kislány) utazik egy 5 fős személyautóban. Vezetni csak anyuka és apuka tud. A kocsiban a gyerekek nem ülhetnek elöl, valamint apuka nem szeretne nagymama mellé ülni. Hányféleképpen helyezkedhetnek el a kocsiban? *Egy kocsiban elöl 2 hely, hátul 3 hely van, és két hely akkor szomszédos, ha azonos sorban egymás mellett vannak.* (4 pont)

**E-5.** Mint az közismert, Süsünek, a sárkánynak csak egy feje van, ám öt testvérének mindegyikének több is. Süsü testvérei egy nap körbeülnek egy nagy asztalt és minden sárkány szóvivő feje közli a többiekkel, hogy nekik átlagosan hány fejük van. A következő mondatok hangzanak el:

- Nektek átlagosan 7 fejetek van.
- Nektek átlagosan 9 fejetek van.
- Nektek átlagosan 8 fejetek van.
- Nektek átlagosan 8 fejetek van.
- Nektek átlagosan 9 fejetek van.

Hány feje van összesen Süsü öt testvérének? (4 pont)


**E-6.** Marvin kirakott két pozitív egész számot úgy, hogy közben csak kétféle számjegykártyát használt. Hányféleképpen tudta ezt megtenni, ha tudjuk, hogy a két szám összege 10000?
*Megjegyzés: A két szám felcserélése nem számít külön esetnek.* (5 pont)

**E-7.** Egy $10 \times 10$-es sakktábla bal alsó sarkából szeretnénk egy huszárral eljutni a jobb felső sarokba. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha csak olyan lépés megengedett, amelyben legalább egy oszloppal jobbrább és egy sorral feljebb kerülünk?
*Megjegyzés: A huszár úgy tud lépni, hogy két mezőt lép egy irányba (fel, le, jobbra vagy balra) és egy mezőt egy erre merőleges irányba.* (5 pont)

**E-8.** Dávid 9 négyzetből összerakott egy nagyobb téglalapot. Hány egység hosszú a téglalap rövidebbik oldala, ha a négyzetek oldalhosszai rendre $1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15$ és 18 egység? (6 pont)

**E-9.** Az Edinburgh-i vár körül hat védőbástya helyezkedik el, a bástyák közt pedig titkos alagutak futnak. Mikor Artúr király meg akarta támadni a várat, egyik kéme jelentette az alagutak létezését. Azt nem tudta, hogy hogyan helyezkednek el az alagutak, azt viszont igen, hogy egy olyan bástya van, amelyből 1, két olyan bástya, amelyből 2 és három olyan bástya, amelyből 3 másik bástyába lehet közvetlenül eljutni. Ez alapján Artúr király felrajzolta az alagutak összes lehetséges elhelyezkedését. Hány lehetőséget kellett felrajzolnia, ha tudjuk, hogy egy alagút pontosan két bástya közt megy, és semelyik két bástya közt sincs egynél több alagút?
(6 pont)

**E-10. Játék:** Adottak 1-től 9-ig a számok. A két játékos felváltva kiválaszt magának egy olyan számot, amit korábban még senki sem választott. Az a játékos nyer, akinek először megtalálható a saját számai között három darab, melyek összege 15. Ha már mind a kilenc szám megtalálható valakinél, és egyik játékosnál sem található három szám, melyek összege 15, akkor a második játékos nyert.
*Győzzétek le a gépet kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.* (12 pont)

**Megoldókulcs:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| E-1. | 13 | E-4. | 18 | E-7. | 20 |
| E-2. | 36 | E-5. | 41 | E-8. | 32 |
| E-3. | 35 | E-6. | 8 | E-9. | 1620 |


# Megoldások

## C kategória

**C-1.** Nézzük a négyzet 4. (legalsó) sorát! Láthatjuk, hogy az üres helyekre a 2 és a 3 számokat kell beírjuk, viszont ha a 2-t a 2. oszlopba helyezzük, akkor abban az oszlopban már lesz két 2-es, tehát ez nem lehetséges. A 2 tehát ebben sorban a 3. oszlopba kell, hogy kerüljön, így tehát a 2. oszlopban a 3 fog állni. Ugyanilyen logika alapján az is kiderül, hogy a 4. oszlop 2. sorában a 3, a 3. sorában pedig a 2 áll. A táblázatunk tehát a következőképpen néz most ki:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 1 |
| | 2 | | 3 |
| | | x | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 4 |

Vizsgáljuk a 2. sort! Ide az 1 és 4 számokat kell valahogy beírnunk. A fenti logika alapján a 4. sor 1. oszlopában található 1-es kizárja, hogy az 1-et az 1. oszlopba írjuk, tehát oda a 4 fog kerülni, az 1 pedig mehet a 3. oszlopba. Ugyanígy ezt a 2. oszlopra is megismételjük. A táblázatunk ezután ilyen lesz:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4 | | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |
| | 1 | x | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 4 |

Nézzük végül a 3. sort! Innen a 4 és a 3 hiányzik. A 2. sor 1. oszlopában álló elem kizárja, hogy a 4 az első oszlopba kerüljön, tehát az csakis az $x$ helyére kerülhet, és ezzel készen vagyunk.

**C-2.** Vegyük a négyszögben azokat a külső szögeket, melyekről tudjuk, hogy 140 fokosak! Vizsgáljuk a hozzájuk tartozó belső szögeket! Láthatjuk, hogy ezek a külső szögek a hozzájuk tartozó belső szöget 180°-ra egészítik ki, így az általunk vizsgált belső szögek mindegyike $180° - 140° = 40°$ lesz. Tudjuk továbbá, hogy egy tetszőleges négyszög belső szögeinek összege 360°. Így kiszámolhatjuk, hogy a négyszög negyedik belső szöge (a homorúszög) $360° - 3 \cdot 40° = 240°$. Láthatjuk továbbá azt is, hogy az a szög egy egyenesszög, és a keresett (kérdőjellel jelölt) szög összege. Így tehát megkapjuk, hogy a keresett szög értéke $240° - 180° = 60°$.

**C-3.** A KARTAL szóban négy különböző mássalhangzó van. Ezeket 24-féleképpen rendezhetjük sorba, hiszen az első helyre négyféle betűt rakhatunk; ha az első helyre már választottunk betűt, akkor a második helyre a maradék három betű mindegyikét választhatjuk; ha ide is választottunk, akkor pedig a maradék két betűt kétféle sorrendben írhatjuk az első kettő mögé. Így összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$-féleképpen kerülhetnek be a mássalhangzók a szóban nekik kijelölt helyekre. Azonban Kartal, Tarkal, Lartak és Raltak nevű ember már nem csatlakozhat a társasághoz, így összesen $24 - 4 = 20$ új barátjuk lehet Kartaléknak.

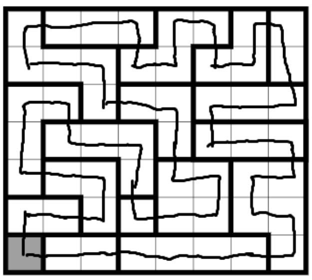



**C-4.** Egy kockán 21 a számok összege, így a három kockán összesen 63. Számoljuk össze, hogy a látható oldalakon összesen $4+5+3+2+6+5+1=26$ pontot látunk, így a nem látható oldalakon a számok összege $63-26=37$.

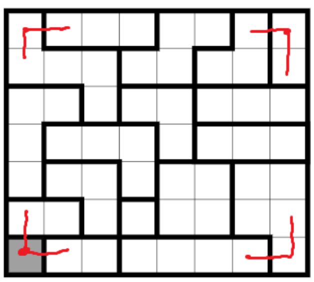
**C-5.** Nagymama egyenlően elosztott 91 süteményt, ezért az unokák és az egy unoka által kapott sütik száma is csak 91-nek osztója lehet, azaz $1, 7, 13$, vagy 91. A feladatból tudjuk, hogy az unokák száma legalább 2, és egy unoka legalább 9 sütit megevett. Emiatt egy unoka csak 13, vagy 91 sütit ehetett meg, viszont legalább ketten vannak, ezért csak 13 sütit kaphatott egy unoka.

**C-6.** Egyjegyű számok közül az 1 az egyetlen, aminek a számjegyeinek összege és nemnulla számjegyeinek szorzata is 1.
Legyen $ab$ egy kétjegyű szám. $a+b=2$ akkor teljesül, ha $a=2$ és $b=0$ vagy ha $a=1$ és $b=1$. Ezekben az esetekben a nemnulla számjegyek szorzata 2, illetve $1\cdot 1=1$, tehát kétjegyű számok közül a 20 az egyetlen, ami megfelel a feladat feltételeinek.
Legyen $abc$ egy háromjegyű szám. $a+b+c=3$ akkor teljesül, ha az $\{a,b,c\}$ számhármas a $\{3,0,0\}$, $\{2,1,0\}$ és $\{1,1,1\}$ számhármasok közül kerül ki. Ezek közül csak az elsőben 3 a nemnulla számjegyek szorzata, ezért a 300 az egyetlen olyan háromjegyű szám, ami teljesíti a feladat feltételeit.
Végül nézzük a négyjegyű számokat. Legyen $abcd$ egy négyjegyű szám. $a+b+c+d=4$ pontosan akkor teljesül, ha $\{a,b,c,d\}$ a $\{4,0,0,0\}, \{3,1,0,0\}, \{2,2,0,0\}, \{2,1,1,0\}, \{1,1,1,1\}$ számnégyesek közül kerül ki. Ezekben a számnégyesekben rendre $4, 3, 4, 2$, illetve 1 a nemnulla számjegyek szorzata, így csak a $\{4,0,0,0\}$ és $\{2,2,0,0\}$ számnégyesek közül kerülhet ki $\{a,b,c,d\}$. Ezekből a számnégyesekből képezhető négyjegyű számok a 4000, a 2002, a 2020 és a 2200, ezek közül csak a 2002 kisebb, mint 2020.
Tehát összesen 4 db olyan pozitív egész szám van, ami megfelel a feladat feltételeinek, ezek az 1, 20, 300 és a 2002.

**C-7.** A robot útja a következő:

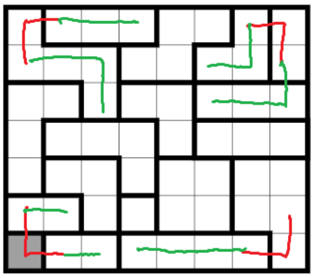


Tehát 35-ször kanayrodott összesen. Most megmutatjuk, hogy hogyan lehet erre rájönni. Először is a sarkoknál mindig bemegy az út a sarokba aztán pedig kijön, vagyis:

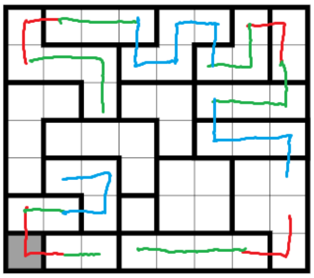




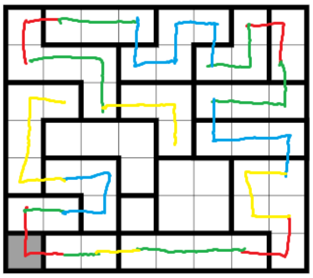
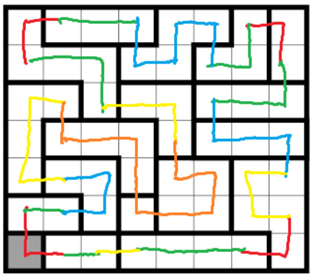
Ezután ha olyan vastag vonallal határolt részhez érünk, ahol csak egyféleképpen lehet végigmenni (vagyis van két mező, akiknek páratlan szomszédja van a vastag vonallal határolt részben), ott végigmegyünk. Nevezzük ezeket *folyosónak*.



A *folyosókra* csak azokon a mezőkön szabad bemenni, amelyiknek páratlan szomszédja van.



Ezután pedig már könnyen be lehet fejezni:

**C-8.** A kocsit csak anyuka és apuka tudja vezetni. Ha anyuka vezet, akkor mellette csak apuka vagy nagymama ülhet, hiszen a gyerekek nem ülhetnek elöl. Akármelyikük is ül elöl, a másikuk a gyerekekkel hatféleképpen ülhet hátul, hiszen háromféleképpen választhatjuk ki, ki üljön a bal oldali ülésen, és ha megvan, ki ül ott, a többiek kétféle sorrendben ülhetnek le a maradék két ülésre, tehát $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen ülhetnek hátul. Így ha anyuka vezet, $2 \cdot 6 = 12$-féleképpen helyezkedhetnek el az autóban az utasok. Ha apuka vezet, akkor mellette csak anyuka ülhet, hiszen apuka és nagymama nem ülhet egymás mellett, a gyerekek pedig nem ülhetnek elöl. A hátul ülők ekkor is hatféle sorrendet valósíthatnak meg. Így összesen $12 + 6 = 18$-féleképpen ülhet a család a kocsiban.

**C-9.** Azt állítjuk, hogy Gábor legfeljebb 14 számot írhatott fel. Pontosan 14 számot felírhatott például a következőképpen:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| szám | 199 | 279 | 287 | 295 | 339 | 347 | 355 | 363 | 371 | 406 | 414 | 422 | 430 | 501 |
| számjegyösszeg | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

A továbbiakban belátjuk, hogy több szám nem írható fel a megadott módon. Tegyük fel, hogy $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ háromjegyű számok, melyek számjegyösszegei rendre $d_1, d_2, \dots, d_{15}$, és teljesül, hogy

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{15}$$
$$d_1 > d_2 > \ldots > d_{15}$$

Ha mindegyik szám első (százas helyiértéken lévő) jegyét eggyel csökkentjük, azzal mindegyik szám számjegyösszegét eggyel csökkentjük, és a számok sorrendjét nem változtatjuk, tehát a számok továbbra is növekvő, a számjegyösszegeik pedig csökkenő sorrendben lesznek. Ezt a lépést ismételhetjük addig, amíg a legkisebb szám, azaz $a_1$, első jegye 1 nem lesz. Feltehetjük tehát, hogy $100 \leq a_1 \leq 199$. A feltételekből következik, hogy $d_{15} \leq d_1 - 14$, és mivel $a_1$ első számjegye 1-es, ezért $d_1 \leq 19$. Ezekből következik, hogy $d_{15} \leq 5$. A továbbiakban esetekre bontunk $d_{15}$ értéke szerint:

1. $d_{15} = 1$: Ekkor $a_{15}$ egy háromjegyű szám, melynek számjegyösszege 1, tehát $a_{15} = 100$, de ekkor $a_1 < a_{15}$ nem teljesülhet, hiszen $a_1$ is háromjegyű.

2. $d_{15} = 2$: Ekkor $a_{15} \leq 200$, tehát $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ mind 100 és 199 közé esnek. Ezen 14 szám tízes helyiértéken lévő számjegyei ekkor szigorúan növekvő sorozatot alkotnak: ha például $a_1$ és $a_2$ második jegye is megegyezik, akkor csak az utolsó jegyükben különbözhetnek, és mivel a számjegyösszegek sorozata csökken, ezért $a_2 < a_1$, amit kizártunk (ha pedig $a_2$ második jegye kisebb, akkor egyből $a_2 < a_1$ következik). Ekkor viszont $a_{14}$ tízes helyiértékre eső jegye legalább 13-al nagyobb, mint $a_1$-é, ami nem lehet, hiszen minden számjegy egy 0 és 9 közé eső szám.

3. $d_{15} = 3$: Ekkor $a_{15} \leq 300$. Tehát az $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ számok közül az első néhány első jegye 1, a többié 2. Az előző esethez hasonlóan belátható, hogy azon számok között, melyek első jegye megegyezik, a második jegyek szigorúan növekvő sorrendben követik egymást. Ebből az is következik, hogy ezen számok utolsó jegye legalább kettesével csökken, hiszen összességében a számjegyösszegnek csökkennie kell.

   Így ha még $a_6$ első jegye is 1-es, akkor az utolsó jegye legalább 10-el kisebb, mint $a_1$ utolsó jegye, ami nem lehet. Tehát $a_6$ első jegye 2, ekkor viszont ha $a_{11}$ első jegye is 2, akkor $a_{11}$ utolsó jegye legalább 10-el kisebb , mint $a_6$-é, ami szintén nem lehet. Így $a_{11} \geq 300$, ami ellentmond $a_{15} \leq 300$-nak.

4. $d_{15} = 4$: Ekkor $a_{15} \leq 400$. Ugyanakkor tudjuk, hogy $d_1 \geq d_{15} + 14 = 18$, azaz $a_1 \geq 189$. Az előző esetekhez hasonlóan láthatjuk, hogy ha $a_3$ első jegye 1-es, akkor második jegye legalább 2-vel nagyobb $a_1$ második jegyénél, ami nem lehetséges, tehát $a_3 \geq 200$. Hasonlóan ha $a_8$ első jegye 2-es, akkor utolsó jegye legalább tízzel kisebb, mint $a_3$-é, ami nem lehet, tehát $a_8 \geq 300$. Ugyanezen gondolatmenet szerint $a_{13} \geq 400$, ami ellentmond $a_{15} \leq 400$-nak.

5. $d_{15} = 5$: Ekkor $a_{15} \leq 500$, illetve mivel $d_1 \leq 19 = 5 + 14$, ez az eset csak akkor állhat fenn, ha a $d_1, d_2, \dots, d_{15}$ számok értékei rendre $19, 18, 17, \dots, 5$. Mivel $d_1 = 19$, ezért szükségszerűen $a_1 = 199$. Így $a_2 \geq 200$, és $d_2 = 18$, tehát $a_2 \geq 279$. Ha $a_5$ első jegye 2, akkor a második jegye legalább 3-al nagyobb $a_2$-énél, ami nem lehet, tehát $a_5 \geq 300$. Emiatt $a_{10} \geq 400$, mert másképp $a_{10}$ utolsó jegye legalább 10-el kisebb, mint $a_5$-é. Mivel $d_{10} = 10$, az $a_{10}$ utolsó jegye legfelejbb 6 lehet. Így kapjuk, hogy $a_{14} \geq 500$, hiszen egyébként $a_{14}$ utolsó jegye legalább 8-al kisebb lenne $a_{10}$ utolsó jegyénél. Így viszont azt kaptuk, hogy $500 \leq a_{14} < a_{15} \leq 500$, ami ellentmondás.

Mindegyik esetben ellentmondást kaptunk, tehát nem adható meg 15 egymást követő háromjegyű szám a feltételeknek megfelelően, így nyilván több sem. Gábor tehát legfeljebb 14 számot írhatott fel a táblára.




**C-10.** Az a stratégiánk, hogy a bástyával minden lépésben olyan mezőre lépünk, amely a bal felső és jobb alsó sarkot összekötő átlón van. Ammenyiben a kiindulóállásban ilyen mezőn állt a bábu, akkor átadjuk a kezdést, különben mi kezdünk.

Megmutatjuk, hogy ha a bábu nem ilyen mezőn áll, akkor tudunk ilyen mezőre lépni, illetve hogyha nem ilyen mezőről lép valaki, akkor nem tud ilyen mezőre lépni.

Mivel jobbra és lefele akármennyit léphetünk, így ha nem az átlón állunk, akkor vagy tőle balra áll a bábu, ekkor jobbra ráléphetünk az átlóra, vagy felette áll a bábu, ekkor lefele tudunk rálépni az átlóra. Az átlóról viszont ha lefele, vagy jobbra ellép valaki, akkor ezzel a lépéssel nem kerülhet az átló egy másik mezőjére, mivel az átlónak minden sorban és oszlopban csak egy mezője van. Azaz az átlóra a másik játékos így nem léphet, azaz nem tud nyerni, mivel a nyerő cella az átlón van.

Tehát azt tudjuk garantálni, hogy mindig az átlóra lépjünk. Az világos, hogy a jobb alsó sarok alá nem kerülhetünk, szóval ha minden lépésünk után, amikor az átlóra lépünk, akkor biztosan közelebb kerülünk a jobb alsó sarokhoz, akkor biztosan rá is lépünk néhány lépés után.

Ez pedig azért igaz, mivel ha megnézzük, hogy a bábu adott helyzetében mennyi a jobb alsó saroktól való sorok és oszlopok összege, akkor azt figyelhetjük meg, hogy ez minden lépésben csökken. És nem lehet negatív, így előbb utóbb 0 lesz. Ekkor nyerünk, mivel ilyen lépést csak mi léphettünk, mivel ekkor az átlóra kell lépni.

XIV. DÜRER VERSENY

**MATEMATIKA**
feladatsor és megoldások

Online forduló:
2020. október 22.


CD kategória kategória
E kategória
9-12. osztályosok

## D kategória

**D-1.** Nézzük a négyzet 4. oszlopát. Láthatjuk, hogy innen az 1, 3, 4 számok hiányoznak. Az oszlop legalsó mezőjébe nem kerülhet 1-es vagy 4-es, hiszen az 5. sorban már mindkét szám szerepel. Ide tehát mindenképp a 3 kerül. Ezután vizsgáljuk a táblázatban szereplő 4-eseket. A 3. sorban kötelező 4-esnek szerepelnie, azonban a három üres mező közül csak az elsőre kerülhet, mivel a 2. és 5. oszlopban már van 4-es. Hasonló gondolatmenet alapján, a 2. sorban szintén lennie kell 4-esnek, ez csak a 4. pozícióba kerülhet, mert az 1. és 5. oszlopban már van 4-es. Ekkor a táblázat a következőképpen néz ki:

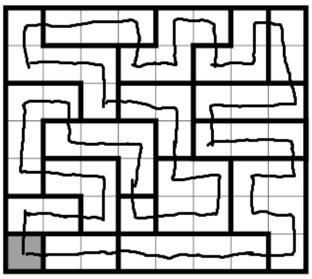
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | | x | |
| | 2 | 0 | 4 | |
| 4 | | 1 | 0 | |
| | | | 2 | 4 |
| 1 | 4 | | 3 | |

A 4. oszlopot vizsgálva láthatjuk, hogy az $x$ helyére Timi csakis az 1-est írhatta.

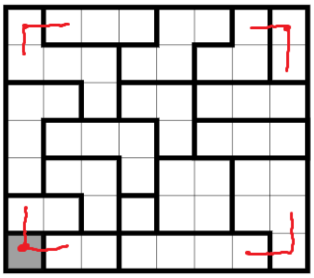
**D-2.** A KARTAL szóban négy különböző mássalhangzó van. Ezeket 24-féleképpen rendezhetjük sorba, hiszen az első helyre négyféle betűt rakhatunk; ha az első helyre már választottunk betűt, akkor a második helyre a maradék három betű mindegyikét választhatjuk; ha ide is választottunk, akkor pedig a maradék két betűt kétféle sorrendben írhatjuk az első kettő mögé. Így összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$-féleképpen kerülhetnek be a mássalhangzók a szóban nekik kijelölt helyekre. Azonban Kartal, Tarkal, Lartak és Raltak nevű ember már nem csatlakozhat a társasághoz, így összesen $24-4 = 20$ új barátjuk lehet Kartaléknak.

**D-3.** Egy kockán 21 a számok összege, így a három kockán összesen 63. Számoljuk össze, hogy a látható oldalakon összesen $4+5+3+2+6+5+1 = 26$ pontot látunk, így a nem látható oldalakon a számok összege $63 - 26 = 37$.

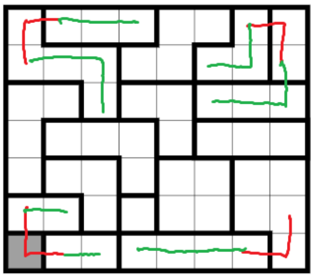
**D-4.** A robot útja a következő:



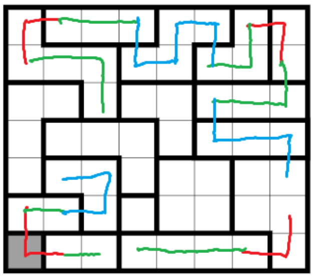
Tehát 35-ször kanayrodott összesen. Most megmutatjuk, hogy hogyan lehet erre rájönni. Először is a sarkoknál mindig bemegy az út a sarokba aztán pedig kijön, vagyis:



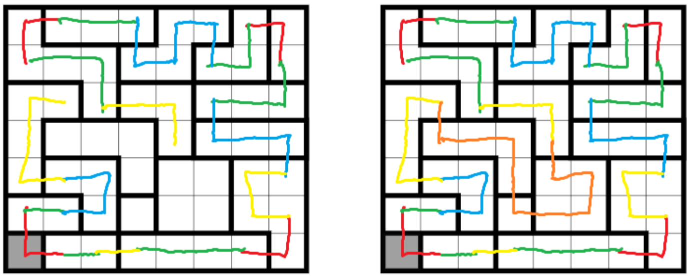
Ezután ha olyan vastag vonallal határolt részhez érünk, ahol csak egyféleképpen lehet végigmenni (vagyis van két mező, akiknek páratlan szomszédja van a vastag vonallal határolt részben), ott végigmegyünk. Nevezzük ezeket *folyosónak*.



A *folyosókra* csak azokon a mezőkön szabad bemenni, amelyiknek páratlan szomszédja van.



Ezután pedig már könnyen be lehet fejezni:



**D-5.** Legyen $c$ és $h$ a rendelt csirkefalatok illetve hagymakarikák száma. Az első feltételből azt tudjuk, hogy

$$\frac{3}{2} \cdot \left(c - \frac{1}{5}\right) = h$$



$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}c\right)=h$$
$$\frac{6}{5}c=h$$
$$6c=5h.$$

A második feltételből pedig

$$h-44=\frac{2}{5}\cdot\left(c-\frac{1}{5}c\right)$$
$$5h-220=2\cdot\left(\frac{4}{5}c\right)$$
$$25h-1100=8c.$$

Az első egyenletből kapott $6c=5h$ feltételt behelyettesítve a baloldalra :

$$30c-1100=8c$$
$$22c=1100$$
$$c=50$$

Ekkor a $\frac{6}{5}c=h$ egyenletből $h=\frac{6}{5}\cdot 50=60$, tehát Ákos $c+h=50+60=110$ csirkefalatot és hagymakarikát rendelt összesen.

**D-6.** A megoldás során az $|XY|$-nal jelöljük az $XY$ szakasz hosszát. Mivel $ABCD$ téglalap, így $|AD|=|BC|$ és $|AB|=|DC|$ ismert. A Pitagorasz-tétel segítségével meghatározhatjuk $AD$ illetve $BE$ hosszát:

$$|DC|^2+|AD|^2=|AC|^2,$$

amelyből $|AD|=\sqrt{17^2-8^2}=15$ adódik.

$$|AB|^2+|BE|^2=|AE|^2,$$

innen pedig $|BE|=\sqrt{10^2-8^2}=6$ adódik.
Ekkor $T_{AEC}=\frac{|EC|\cdot|AB|}{2}$, mivel a háromszög területét $\frac{am_a}{2}$ képletből ki tudjuk számolni, ahol $a$ a háromszög egy oldala és $m_a$ a hozzá tartozó magasság. És az $AEC$ háromszög $EC$ oldalához tartozó magassága éppen $BA$, mivel az $A$ csúcsból ez az $EC$-re bocsátott merőleges szakasz.
Azaz a háromszög területe $\frac{(15-6)(8)}{2}=36$ területegység.

**D-7.** Legyenek a sárkányok fejeinek száma $f_1,f_2,f_3,f_4,f_5$ a megszólalás sorrendjében. Ekkor azt tudjuk a feladat feltételéből, hogy

$$\frac{f_2+f_3+f_4+f_5}{4}=7$$
$$\frac{f_1+f_3+f_4+f_5}{4}=9$$
$$\frac{f_1+f_2+f_4+f_5}{4}=8$$
$$\frac{f_1+f_2+f_3+f_5}{4}=8$$
$$\frac{f_1+f_2+f_3+f_4}{4}=9$$




Adjuk össze ezt az 5 egyenletet. Minden $f_i$ pontosan 4 egyenletben szerepel, mindben $\frac{1}{4}$-es együtthatóval, így az összegben a baloldalon minden $f_i$-nek 1 $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ lesz az együtthatója. Ez alapján az egyenletek összege

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 7 + 9 + 8 + 8 + 9 = 41$$

ami éppen azt jelenti, hogy Süsü 5 testvérének összesen 41 feje van.

**D-8.** A két pozitív egész szám tízes számrendszerbeli alakja legyen $\overline{abcd}$, illetve $\overline{efgh}$. Legyen $\overline{abcd} \leq \overline{efgh}$, ami azt jelenti, hogy $\overline{abcd}$ akár egyjegyű is lehet. (Vagyis $a$, $b$, $c$ közül némelyik változó esetleg nem is jelöl számjegyet, nem tartozik a számhoz.) $5000 \leq \overline{efgh} \leq 9999$, tehát a nagyobbik szám nyilván négyjegyű.
$d + h$ osztható 10-zel, így az egyes helyiértéken szereplő számjegyek összege 0 vagy 10 lehet. $d$ és $h$ értékei szerint három esetre bonthatjuk a megoldást:

1. eset: $d = h = 0$,

2. eset: $d = h = 5$,

3. eset: $d + h = 10$ úgy, hogy $d \neq h$.

Nézzük végig szisztematikusan a három esetet!

1. eset: $d = h = 0$. A 0-n kívül fel kell használnunk egy pozitív számjegyet is, legyen ez $k$. A két szám összege osztható $k$-val, mivel csupa $k$-val osztható számjegyekből állnak. Emiatt az összegük - a 10000 - felírható $k \cdot s$ alakban, ahol $s$ egy legfeljebb négyjegyű pozitív egész, amelynek mind a négy helyiértékén 0, 1 vagy 2 szerepel aszerint, hogy a két összeadandó szám adott helyiértékén hányszor fordult elő a $k$ számjegy. (Például $\overline{k0kk} + \overline{k0k} = 1112 \cdot k$, itt $s = 1112$.) $s | 10000$, illetve $k < 10$ miatt $s > 1000$. A 10000-nek az 1000-nél nagyobb osztói közül egyedül a 2000 ilyen alakú, tehát $s = 2000$ és $k = 5$. Ez azt jelenti, hogy a két szám mindegyikében az ezres helyiértéken 5-ös szerepel, és a többi jegyük mind nulla. Az így kapott $5000 + 5000$ összeg jó megoldás, és az előbbiek miatt ebben az esetben ez a megoldás az egyetlen.

2. eset: $d = h = 5$. Az egyik felhasznált számjegy az 5, és teljesül az, hogy $\overline{abc} + \overline{efg} = 999$. Így $c + g = 9$, ami miatt $c \neq g$. Két eset van:

   (a) részeset: $c$ és $g$ közül az egyik 5-ös, és a másik 4-es,

   (b) részeset: $c$ nem is számjegyet jelöl, vagyis a kisebbik szám egyjegyű: $\overline{abcd} = d$.

   Most ezeket az eseteket vizsgáljuk meg (2/a és 2/b)!

   (a) részeset: Egyik helyiértéken sincs átvitel, így $a + e = b + f = c + g = 9$, és ez csak úgy állhat elő, hogy az azonos helyiértékeken az egyik számjegy 4-es, a másik 5-ös. $a < e$, emiatt $a = 4$ és $e = 5$, de a százasoknál és a tízeseknél felcserélhető a két számban a két számjegy. Így összesen $2 \cdot 2 = 4$ számpárt kapunk megoldásként: $4445 + 5555$, $4455 + 5545$, $4545 + 5454$, és $4555 + 5445$.

   (b) részeset: $\overline{abcd}$ egyjegyű, $\overline{abc} = 0$ (de a 0-k nem is szerepelnek $d$ előtt), és $\overline{efg} = 999$. Itt tehát az $5 + 9995$ felbontás az egyetlen megoldás.

3. eset: $d$ és $h$ két különböző pozitív számjegy, amelyek összege 10. Ekkor $\overline{abc} + \overline{efg} = 999$, tehát $c + g = 9$-nek ebben az esetben is teljesülnie kell. $c \neq g$, mivel az összegük páratlan. $c$ és $g$ viszont különböző számjegyeket sem jelölhetnek, mivel akkor az összegük 10 kellene, hogy legyen.

Tehát $c$ ebben az esetben sem jelölhet számjegyet, így $\overline{abcd}$ egyjegyű és $\overline{efg} = 999$. Az egyik számjegy szükségképpen a 9-es, ezért a másik az 1-es, és két további megoldást kapunk: $1+9999$ és $9+9991$.

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, tehát a megtalált 8 darab számpár a feladat összes megoldása.

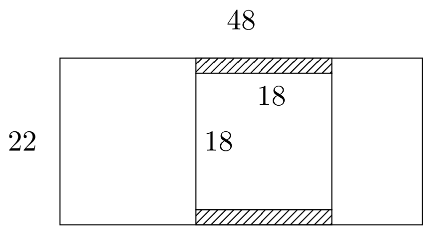
**D-9.** Mivel a nagy téglalap kirakható a kisebb négyzetekből, ezért a téglalap területe egyenlő a kisebb négyzetek területeinek összegével. Így a téglalap területe

$$\begin{aligned} T &= 1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = \\ &= 1 + 16 + 49 + 64 + 81 + 100 + 196 + 225 + 324 = \\ &= 1056. \end{aligned}$$

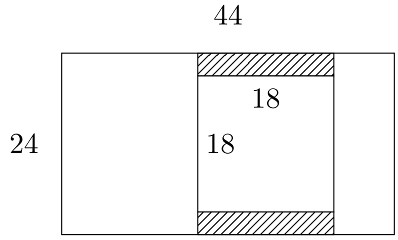
Tegyük fel, hogy a téglalap oldalhosszai $a$ és $b$, ahol $a \leq b$. Ekkor tudjuk, hogy a téglalap területe $T = ab = 1056$, illetve mivel egy $18 \times 18$-as négyzet lehelyezhető a téglalap belsejében, szükségszerűen $a \geq 18$ és $b \geq 18$ is teljesül. Ezekből tudjuk, hogy

$$18 \leq a \leq \sqrt{ab} = \sqrt{1056} < 33$$

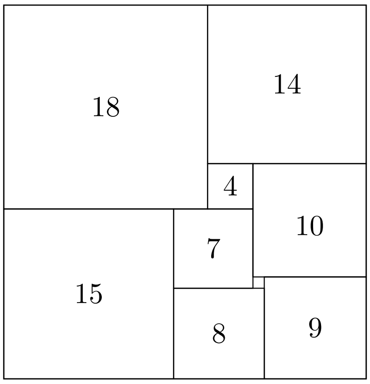
Így az $a$ lehetséges értékei $a = 22, 24, 32$, hiszen ezek az 1056 ezen intervallumba eső osztói. Az ezekhez tartozó $b$ értékek rendre $b = 48, 44, 33$.
Azt állítjuk, hogy a $22 \times 48$-as és $24 \times 44$-es téglalapok nem fedhetőek le a megadott négyzetekkel, míg a $32 \times 33$-as igen.
Helyezzünk le a $22 \times 48$-as téglapra egy $18 \times 18$-as négyzetet. Ennek oldalait a téglalap hosszabb oldala felé kiterjesztve két kisebb téglalapot kapunk (lásd az ábrát), melyek összterülete $4 \cdot 18 = 72$ egység. Ugyanakkor mindkét téglalapnak legalább az egyik oldala legfeljebb 4 egység hosszú, így lefedésükhöz csak az $1 \times 1$-is illetve a $4 \times 4$-es négyzetet használhatjuk, melyek összterülete $1 + 16 = 17 < 72$. Tehát a két kis téglalap nem fedhető le a megadott négyzetekkel, és emiatt a $22 \times 48$-as téglalap sem.




Hasonlóan járhatunk el a $24 \times 44$-es téglalappal is: letéve a $18 \times 18$-os négyzetet, annak két oldalán keletkezik két téglalap, melyek összterülete $6 \cdot 18 = 108$ egység. Továbbá mindkét téglalapnak van legfeljebb 6 egység hosszú oldala, tehát a két téglalapot csak az $1, 4$ oldalhosszú négyzetekkel fedhetjük le, melyek összterülete $1 + 16 = 17 < 108$, tehát a lefedés nem valósítható meg.

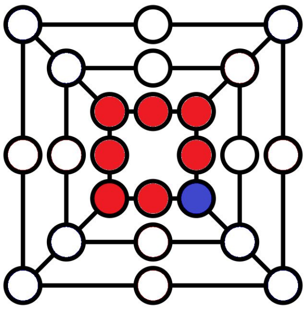


Ugyanakkor a $32 \times 33$-as téglalap lefedhető a megadott négyzetekkel, a következő módon:

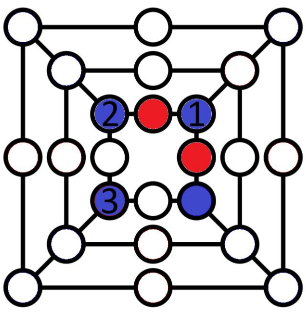



Tehát a téglalap oldalai 32, illetve 33 egység hosszúak, így a rövidebb oldal hossza 32 egység.

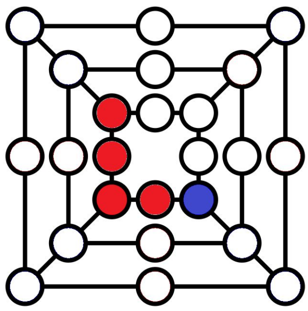
**D-10.** A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. A kezdő lépés lehet tetszőleges olyan mező, ami három hármasban is benne van.
Most egy konkrét kezdőmező mellett megmutatjuk a nyerő stratégiát. A kezdőlépésünk legyen az alábbi ábrán levő kék korong:



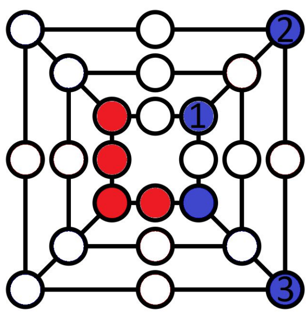
Két esetünk lesz, aszerint, hogy a másik játékos első lépése az ábrán pirossal jelölt mezők közül kerül-e ki, vagy nem.
Ha nem a piros mezők közül kerül ki, akkor ha az alábbi ábrán lévő kék korongokat a megszámozottság sorrendjébe rakjuk lefele, akkor az első és a második felhelyezése után két opció lesz: a másik játékos vagy az éppen lerakott és a már lent lévő korongunk közé rak, vagy nem, de ha nem, akkor nem hozhatott létre hármast, mert eddig egyet rakhatott a belső négyzet lapjain lévő mezőkön kívülre. Viszont ekkor a következő lépésünkkel mi odarakunk és nyerünk. Tehát ekkor feltehetjük, hogy oda rakott, az egyes és a kettes korongunk lerakása után.



Ekkor amikor leraktuk a hármas korongunkat, akkor se tud úgy rakni a másik játékos, hogy egy hármast hozzon létre. Viszont mi az ő lépése után mindenképpen létrehozunk egy hármast, vagy úgy, hogy a kettes és hármas, vagy pedig a hármas és a legelső korongunk közötti helyre rakva.
Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor másik játékos első lépése a fenti ábrán pirossal jelölt mezők közül volt valamelyik. Ekkor az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy az az alábbi mezők egyike volt, különben tükrözzük az állást a főátlóra, és az a játék menetén nem változtat.



Most is meg tudunk adni az előző esethez hasonló további három mezőt, ahova ha sorba rakunk, akkor a másik játékos mindig kénytelen az éppen lerakott és az eddigiek közütti résbe rakni, különben a következő lépésünkkel mi ott létrehoznánk egy hármast, amivel nyernénk. És ő nem tud úgy máshova rakni, hogy azonnal nyrjen.
És a harmadik korongunk lerakásával két olyan hármast hozunk létre, amiből egy hiányzik és kettőn a mi korongunk van.
Példa megfelelő mezőkre:




Azaz megmutattuk, hogy ezen kezdőmező mellett a másiknak bármi is az első lépése, mi tudunk nyerni.


## E kategória

**E-1.** Nagymama egyenlően elosztott 91 süteményt, ezért az unokák és az egy unoka által kapott sütik száma is csak 91-nek osztója lehet, azaz $1, 7, 13$, vagy 91. A feladatból tudjuk, hogy az unokák száma legalább 2, és egy unoka legalább 9 sütit megevett. Emiatt egy unoka csak 13, vagy 91 sütit ehetett meg, viszont legalább ketten vannak, ezért csak 13 sütit kaphatott egy unoka.

**E-2.** A megoldás során az $|XY|$-nal jelöljük az $XY$ szakasz hosszát. Mivel $ABCD$ téglalap, így $|AD| = |BC|$ és $|AB| = |DC|$ ismert. A Pitagorasz-tétel segítségével meghatározhatjuk $AD$ illetve $BE$ hosszát:

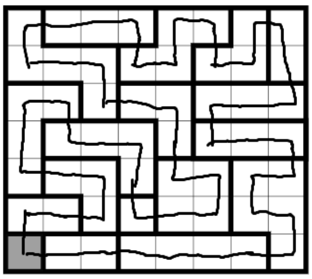
$$|DC|^2 + |AD|^2 = |AC|^2,$$

amelyből $|AD| = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ adódik.

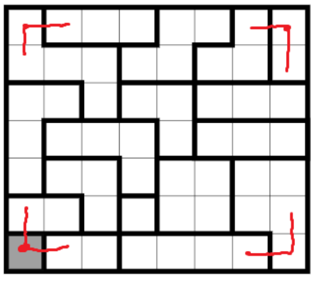
$$|AB|^2 + |BE|^2 = |AE|^2,$$

innen pedig $|BE| = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ adódik.
Ekkor $T_{AEC} = \frac{|EC|\cdot|AB|}{2}$, mivel a háromszög területét $\frac{am_a}{2}$ képletből ki tudjuk számolni, ahol $a$ a háromszög egy oldala és $m_a$ a hozzá tartozó magasság. És az $AEC$ háromszög $EC$ oldalához tartozó magassága éppen $BA$, mivel az $A$ csúcsból ez az $EC$-re bocsátott merőleges szakasz.
Azaz a háromszög területe $\frac{(15-6)(8)}{2} = 36$ területegység.

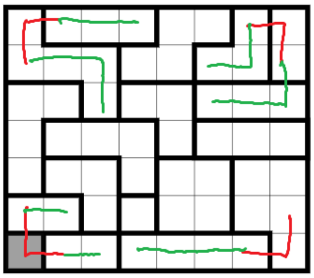
**E-3.** A robot útja a következő:



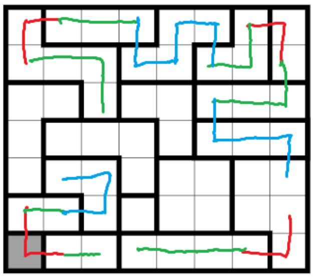
Tehát 35-ször kanayrodott összesen. Most megmutatjuk, hogy hogyan lehet erre rájönni. Először is a sarkoknál mindig bemegy az út a sarokba aztán pedig kijön, vagyis:



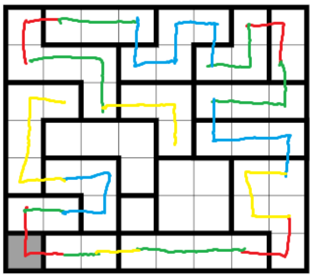
Ezután ha olyan vastag vonallal határolt részhez érünk, ahol csak egyféleképpen lehet végigmenni (vagyis van két mező, akiknek páratlan szomszédja van a vastag vonallal határolt részben), ott végigmegyünk. Nevezzük ezeket *folyosónak*.

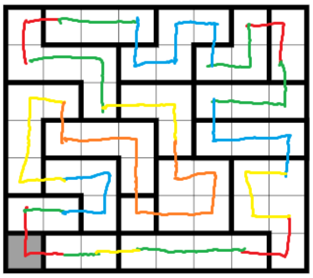


A *folyosókra* csak azokon a mezőkön szabad bemenni, amelyiknek páratlan szomszédja van.



Ezután pedig már könnyen be lehet fejezni:





**E-4.** A kocsit csak anyuka és apuka tudja vezetni. Ha anyuka vezet, akkor mellette csak apuka vagy nagymama ülhet, hiszen a gyerekek nem ülhetnek elöl. Akármelyikük is ül elöl, a másikuk a gyerekekkel hatféleképpen ülhet hátul, hiszen háromféleképpen választhatjuk ki, ki üljön a bal oldali ülésen, és ha megvan, ki ül ott, a többiek kétféle sorrendben ülhetnek le a maradék két ülésre, tehát $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen ülhetnek hátul. Így ha anyuka vezet, $2 \cdot 6 = 12$-féleképpen helyezkedhetnek el az autóban az utasok. Ha apuka vezet, akkor mellette csak anyuka ülhet, hiszen apuka és nagymama nem ülhet egymás mellett, a gyerekek pedig nem ülhetnek elöl. A hátul ülők ekkor is hatféle sorrendet valósíthatnak meg. Így összesen $12 + 6 = 18$-féleképpen ülhet a család a kocsiban.

**E-5.** Legyenek a sárkányok fejeinek száma $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ a megszólalás sorrendjében. Ekkor azt tudjuk a feladat feltételéből, hogy

$$\frac{f_2 + f_3 + f_4 + f_5}{4} = 7$$

$$\frac{f_1 + f_3 + f_4 + f_5}{4} = 9$$

$$\frac{f_1+f_2+f_4+f_5}{4}=8$$
$$\frac{f_1+f_2+f_3+f_5}{4}=8$$
$$\frac{f_1+f_2+f_3+f_4}{4}=9$$

Adjuk össze ezt az 5 egyenletet. Minden $f_i$ pontosan 4 egyenletben szerepel, mindben $\frac{1}{4}$-es együtthatóval, így az összegben a baloldalon minden $f_i$-nek 1 $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ lesz az együtthatója. Ez alapján az egyenletek összege

$$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5 = 7+9+8+8+9 = 41$$

ami éppen azt jelenti, hogy Süsü 5 testvérének összesen 41 feje van.

**E-6.** A két pozitív egész szám tízes számrendszerbeli alakja legyen $\overline{abcd}$, illetve $\overline{efgh}$. Legyen $\overline{abcd} \leq \overline{efgh}$, ami azt jelenti, hogy $\overline{abcd}$ akár egyjegyű is lehet. (Vagyis $a$, $b$, $c$ közül némelyik változó esetleg nem is jelöl számjegyet, nem tartozik a számhoz.) $5000 \leq \overline{efgh} \leq 9999$, tehát a nagyobbik szám nyilván négyjegyű.
$d+h$ osztható 10-zel, így az egyes helyiértéken szereplő számjegyek összege 0 vagy 10 lehet. $d$ és $h$ értékei szerint három esetre bonthatjuk a megoldást:

1. eset: $d=h=0$,
2. eset: $d=h=5$,
3. eset: $d+h=10$ úgy, hogy $d \neq h$.

Nézzük végig szisztematikusan a három esetet!

1. eset: $d=h=0$. A 0-n kívül fel kell használnunk egy pozitív számjegyet is, legyen ez $k$. A két szám összege osztható $k$-val, mivel csupa $k$-val osztható számjegyekből állnak. Emiatt az összegük - a 10000 - felírható $k \cdot s$ alakban, ahol $s$ egy legfeljebb négyjegyű pozitív egész, amelynek mind a négy helyiértékén 0, 1 vagy 2 szerepel aszerint, hogy a két összeadandó szám adott helyiértékén hányszor fordult elő a $k$ számjegy. (Például $\overline{k0kk}+\overline{k0k} = 1112 \cdot k$, itt $s=1112$.) $s|10000$, illetve $k<10$ miatt $s>1000$. A 10000-nek az 1000-nél nagyobb osztói közül egyedül a 2000 ilyen alakú, tehát $s=2000$ és $k=5$. Ez azt jelenti, hogy a két szám mindegyikében az ezres helyiértéken 5-ös szerepel, és a többi jegyük mind nulla. Az így kapott $5000+5000$ összeg jó megoldás, és az előbbiek miatt ebben az esetben ez a megoldás az egyetlen.

2. eset: $d=h=5$. Az egyik felhasznált számjegy az 5, és teljesül az, hogy $\overline{abc}+\overline{efg}=999$. Így $c+g=9$, ami miatt $c \neq g$. Két eset van:

   (a) részeset: $c$ és $g$ közül az egyik 5-ös, és a másik 4-es,

   (b) részeset: $c$ nem is számjegyet jelöl, vagyis a kisebbik szám egyjegyű: $\overline{abcd}=d$.

   Most ezeket az eseteket vizsgáljuk meg (2/a és 2/b)!

   (a) részeset: Egyik helyiértéken sincs átvitel, így $a+e=b+f=c+g=9$, és ez csak úgy állhat elő, hogy az azonos helyiértékeken az egyik számjegy 4-es, a másik 5-ös. $a<e$, emiatt $a=4$ és $e=5$, de a százasoknál és a tízeseknél felcserélhető a két számban a két számjegy. Így összesen $2 \cdot 2 = 4$ számpárt kapunk megoldásként: $4445+5555$, $4455+5545$, $4545+5454$, és $4555+5445$.

(b) részeset: $\overline{abcd}$ egyjegyű, $\overline{abc} = 0$ (de a 0-k nem is szereplnek $d$ előtt), és $\overline{efg} = 999$. Itt tehát az $5 + 9995$ felbontás az egyetlen megoldás.

3. eset: $d$ és $h$ két különböző pozitív számjegy, amelyek összege 10. Ekkor $\overline{abc} + \overline{efg} = 999$, tehát $c + g = 9$-nek ebben az esetben is teljesülnie kell. $c \neq g$, mivel az összegük páratlan. $c$ és $g$ viszont különböző számjegyeket sem jelölhetnek, mivel akkor az összegük 10 kellene, hogy legyen. Tehát $c$ ebben az esetben sem jelölhet számjegyet, így $\overline{abcd}$ egyjegyű és $\overline{efg} = 999$. Az egyik számjegy szükségképpen a 9-es, ezért a másik az 1-es, és két további megoldást kapunk: $1+9999$ és $9 + 9991$.

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, tehát a megtalált 8 darab számpár a feladat összes megoldása.

**E-7.** A huszár minden lépésben vagy kettőt lép felfele és egyet jobbra, vagy kettőt lép jobbra és egyet fel. Tehát minden egyes lépésben 3-mal csökken, hogy hány mezőt kell még a huszárnak fel vagy jobbra lépnie, hogy eljusson a jobb felső sarokba.
Mivel összesen 9-et kell lépnie felfele és jobbra is, így (9+9)/3=6 lépést fog tenni a huszár. Ugyanannyit kell felfele és jobbra is mennie a huszárnak, így 3-szor fog kettőt lépni felfelé, és 3-szor fog kettőt lépni jobbra.
Tehát ahhoz, hogy megkapjuk, hogy hányféleképpen juthat el a huszár a jobb felső sarokba, csak meg kell számolnunk, hogy hányféleképpen lehet a 6 lépés közül kiválasztani 3-at, amikor a huszár például kettőt lép jobbra és egyet fel. Ezt $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen tehetjük meg, vagyis a huszár 20-féleképpen juthat el a jobb felső sarokba.

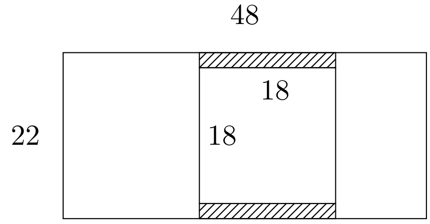
**E-8.** Mivel a nagy téglalap kirakható a kisebb négyzetekből, ezért a téglalap területe egyenlő a kisebb négyzetek területeinek összegével. Így a téglalap területe

$$\begin{aligned} T &= 1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = \\ &= 1 + 16 + 49 + 64 + 81 + 100 + 196 + 225 + 324 = \\ &= 1056. \end{aligned}$$

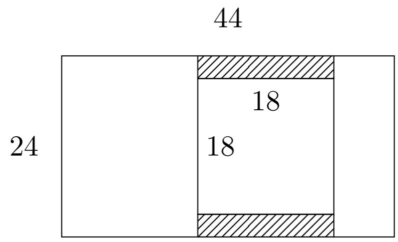
Tegyük fel, hogy a téglalap oldalhosszai $a$ és $b$, ahol $a \leq b$. Ekkor tudjuk, hogy a téglalap területe $T = ab = 1056$, illetve mivel egy $18 \times 18$-as négyzet lehelyezhető a téglalap belsejében, szükségszerűen $a \geq 18$ és $b \geq 18$ is teljesül. Ezekből tudjuk, hogy

$$18 \leq a \leq \sqrt{ab} = \sqrt{1056} < 33$$

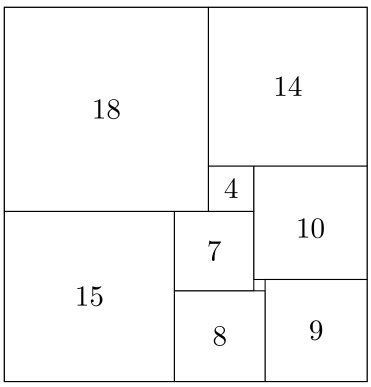
Így az $a$ lehetséges értékei $a = 22, 24, 32$, hiszen ezek az 1056 ezen intervallumba eső osztói. Az ezekhez tartozó $b$ értékek rendre $b = 48, 44, 33$.
Azt állítjuk, hogy a $22 \times 48$-as és $24 \times 44$-es téglalapok nem fedhetőek le a megadott négyzetekkel, míg a $32 \times 33$-as igen.
Helyezzünk le a $22 \times 48$-as téglapra egy $18 \times 18$-as négyzetet. Ennek oldalait a téglalap hosszabb oldala felé kiterjesztve két kisebb téglalapot kapunk (lásd az ábrát), melyek összterülete $4 \cdot 18 = 72$ egység. Ugyanakkor mindkét téglalapnak legalább az egyik oldala legfeljebb 4 egység hosszú, így lefedésükhöz csak az $1 \times 1$-is illetve a $4 \times 4$-es négyzetet használhatjuk, melyek összterülete $1 + 16 = 17 < 72$. Tehát a két kis téglalap nem fedhető le a megadott négyzetekkel, és emiatt a $22 \times 48$-as téglalap sem.




Hasonlóan járhatunk el a $24 \times 44$-es téglalappal is: letéve a $18 \times 18$-os négyzetet, annak két oldalán keletkezik két téglalap, melyek összterülete $6 \cdot 18 = 108$ egység. Továbbá mindkét téglalapnak van legfeljebb 6 egység hosszú oldala, tehát a két téglalapot csak az $1, 4$ oldalhosszú négyzetekkel fedhetjük le, melyek összterülete $1 + 16 = 17 < 108$, tehát a lefedés nem valósítható meg.




Ugyanakkor a $32 \times 33$-as téglalap lefedhető a megadott négyzetekkel, a következő módon:




Tehát a téglalap oldalai 32, illetve 33 egység hosszúak, így a rövidebb oldal hossza 32 egység.

**E-9.** Legyenek a bástyák egy gráf csúcsai, az alagutak pedig az élek.
A három 3 fokú csúcs $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen választható ki, ezután 3-féleképpen választható ki a maradék 3-ból az az egy csúcs, aminek 1 a fokszáma. Ez 60 lehetőség.

A 3-asok összfoka 9, a többié 5.
Ha a 3-asok közt 0 vagy 1 él fut, akkor a 3-asokból 9 vagy 7 él indul ki a többibe, ez több, mint amennyit a többi be tud fogadni. Tehát ez nem lehetséges.

Ha a 3-asok közt két él fut, akkor az 4 fokszámukat fogja le, így $9 - 4 = 5$ él fut ki belőlük, ez pont annyi, amennyit a többi be tud fogadni, tehát a többi között nem futhat él.
Az, hogy a 3-asok háromszögének melyik két éle van behúzva, 3-féleképp dönthető el.
A 3-asok közt futó két él kettőnek egy, egynek pedig kettő fokszámát veszi el, így a megmaradó fokszáma kettőnek 2, egynek pedig 1.

Ha a két oldalról az 1 fokszámú csúcsokat kötjük össze, akkor utána a két-két 2-fokút mind össze kell kötni egymással, ez 1 lehetőség.
Ha az egyik oldalról az 1 fokszámú egy 2 fokszámúval van összekötve, akkor kétféleképpen választhatjuk ki, hogy melyikkel, és ekkor a másik oldalon álló 1 fokú és egy 2 fokúval van összekötve, itt is kétféleképp választhatjuk ki, hogy melyikkel. Ezután azt a két csúcot, aminek még mindig 2 a foka, össze kell kötni a túloldalon az eredetileg 2 fokú cúcsokkal, és ezzel már az összes fokszámot betöltjük.
Kétszer választhattunk kétféleképpen, így ez 4 lehetőség.
Összesen tehát 5 lehetőség van, ha rögzítjük, hogy a 3-asok közt melyik két élet húzzuk be.
Vagyis $3 \cdot 5 = 15$ olyan lehetőség van, amikor két él van behúzva a 3-asok között.

Az az eset maradt hátra, mikor mindháron él be van húzva a 3-asok között.
Ekkor a 3-asokból $9 - 6 = 3$ él mutat ki, tehát a bejövő élek csak 3-at foglalnak le a többi csúcs 5 fokszámából, tehát azok közt húzódik egy él.
A 3 fokúakba mind két él fut be a háromszögükben, tehát 1 szabad fokszámuk marad.
Ha a többi között a két 2 fokszámú van összekötve, akkor azon az oldalon is minden csúcsnak 1 szabad fokszáma lesz, tehát ezután be kell párosítani a két oldalon lévő csúcsokat, ami $3! = 6$-féleképpen tehető meg.
Ha a többi között egy 2 fokszámú és az 1 fokszámú csúcs van összekötve, az kétféleképpen választható, hogy melyik 2 fokszámú legyen, ezután az egyik oldalon három darab 1 szabad fokú fog állni, a másik oldalon pedig egy 1 és egy 2 szabad fokú. Ekkor azt kell csak eldönteni, hogy a kisebbik oldalon az 1 fokú mivel legyen kötve, utána a 2 fokút összekötjük a másik kettővel. Ez 3 lehetőség. Összesen ez 6 választási lehetőség volt.

Tehát miután kiválasztottuk, hogy melyik csúcsok legyenek $3, 2$ vagy 1 fokúak, utána $15 + 6 + 6 = 27$ lehetőség van az élek behúzására.
Vagyis összesen $60 \cdot 27 = 1620$ megfelelő elrendezés van.

**E-10.** A játék trükkje az, hogy ekvivalens egy $3 \times 3$-as bűvös négyzeten játszott amőba (tic-tac-toe) játékkal! *A megoldás hosszúságát elsősorban az amőba játék elemzése, az esetszétválasztás okozza, másrészt pedig az ott használt jelölések és a játékosok stratégiájának tisztázása.*

Először gyűjtsük össze az $1, 2, \ldots 9$ számokból álló összes olyan számhármast, amelyben az elemek összege 15. Ezeket egyszerűen fel tudjuk sorolni, például a legkisebb elemük szerinti növekvő sorrendben:

$$1+5+9 = 1+6+8 = 2+4+9 = 2+5+8 = 2+6+7 = 3+4+8 = 3+5+7 = 4+5+6$$

Rajzoljunk egy $3 \times 3$-as bűvös négyzetet is, és helyezzük el benne a 9 legkisebb pozitív egész számot! Jegyezzük meg, mert ezen fogjuk folytatni a játékot, és a stratégiát is ennek a segítségével tárgyaljuk:

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

Nevezzük összefoglaló néven *vonal*nak a bűvös négyzet három sorát, három oszlopát és két (fő)átlóját! Vegyük észre, hogy a bűvös négyzet 8 vonala éppen az előbb összegyűjtött nyolc lehetséges 3 elemű




részhalmazt határozza meg, mindegyiket pontosan egyszer. Emiatt egy az $1, 2, \ldots 9$ halmazból kiválasztott számhármas összege pontosan akkor 15, ha a bűvös négyzetben ezek a számok egy vonalon helyezkednek el.
Tegyük fel, hogy az első és a második játékos a kiválasztott számaikat rendre piros, illetve kék korongokkal megjelölik a bűvös négyzeten is, miközben a feladat eredeti játékát játsszák. Látható, hogy ez a párhuzamosan játszott játék a $3 \times 3$-as amőba - azzal a nyilvánvaló módosítással, hogy döntetlen esetén is a második nyer, - hiszen

- felváltva választanak egy-egy számot a megmaradók közül (azaz tesznek le saját színű korongot egy üres mezőre),
- a cél az, hogy legyen három kiválasztott szám, amelyek összege 15, ami – mint láttuk – ekvivalens azzal, hogy a bűvös négyzet valamelyik vonalán összegyűljön három saját színű korongjuk.

Azt is figyeljük meg, hogy az amőba játéktábláját tetszőlegesen tükrözhetjük vagy forgathatjuk, a vonalak ugyanazok maradnak; pontosan úgy, ahogyan a bűvös négyzet is tükrözhető, forgatható. *(Egyébként könnyen meggondolható az is, hogy a tükrözésektől és a forgatásoktól eltekintve ez az egyetlen $3 \times 3$-as bűvös négyzet ezekkel a számokkal. A megoldáshoz ez a gondolat nem szükséges, elegendő volt egy bűvös négyzetet találnunk. A játékosok stratégiái nem függenek attól, hogy hogyan jelenítjük meg azokat; a bűvös négyzet "csupán" egy hatékony eszköznek bizonyul, ami átláthatóvá teszi a gondolatmenetet és az esetszétválasztást.)*

Kezdjük el vizsgálni az amőba játékot! A $3\times3$-as amőbában a másodikként lépő játékos minden esetben el tudja érni, hogy a kezdő játékos ne nyerhessen, ezt fogjuk belátni. A feladatbeli játékunkban tehát a másodiknak van nyerő stratégiája.
Az alábbi elnevezésekkel fogjuk tisztázni a stratégiák leírását:

- Az *első* vagy *kezdő* játékosra *piros*ként, a *második*ra *kék*ként is hivatkozunk a megoldásban.
- A *bűvös négyzet* a *játéktábla.*
- A bűvös négyzet 9 *kis négyzet*ből vagy *mező*ből áll, de a mezőket a bennük szereplő számokkal is azonosítjuk.
- A középső kis négyzete a *közép/középső* mező (5),
- a csúcsoknál levő négy kis négyzet *sarok*négyzet (2, 4, 6, 8),
- a többi négy pedig *szélső* négyzet (1, 3, 7, 9).
- A játékosok felváltva *lép*nek, vagyis *választ*anak egy-egy számot/mezőt. A kezdő és a második egy-egy egymás utáni lépése együtt egy *lépéspár* vagy *kör.*
- Egy játékos egy lépésével *csapdát* állít, ha a lépése után valamelyik vonalon két saját színű korongja lesz úgy, hogy a vonal harmadik négyzete üres; az így keletkezett üres mező a *csapda.*
- Ha egy játékos csapdát állít, akkor a lépését *kényszerítő* lépésnek is nevezzük.
- *Halálos csapdának* nevezzük azt a helyzetet, amikor egy játékos egy lépésével több (jellemzően kettő) csapdát hoz létre.
- Egy játékos valamely lépésében *kihasznál*ja a saját csapdáját, ha arra a mezőre lép.

- Fordítva, a játékos *hatástalanít* egy az ellenfél által állított csapdát, ha a csapdamezőben levő számot választja a lépésekor.

Az igazi amőba játékot (ahol van döntetlen), akkor tudja megnyerni valamelyik játékos, ha a lépésével kihasználja egy saját csapdáját. Feltehetjük, hogy mindkét játékos a saját maga által létrehozott csapdáit azonnal kihasználja, ha tudja. Akkor tudja kihasználni, ha a másik nem hatástalanítja azokat. Tehát ha valamelyikük létrehozott egy csapdát, akkor a másiknak a csapda mezőjét hatástalanítania kell a következő körben, különben veszít. Emiatt ha valaki elsőként hoz létre halálos csapdát, az azt jelenti, hogy addig az ellenfél minden csapdáját sikeresen hatástalanította. Ilyenkor a másik játékos nem tud egy lépésben nyerni, de nem is tudja egy lépésben hatástalanítani a két új csapdát. A csapda így valóban halálos: az azt létrehozó játékos nyer a következő lépésben.
A második játékos stratégiája tehát az, hogy úgy lépked, hogy mindig hatástalanítja az ellenfele csapdáit, és nem engedi a kezdőt halálos csapdát létrehozni. Ehhez persze ő is használhat kényszerítő lépéseket.

A lépések sorozatának leírását a következőképpen tesszük tömörebbé: $P$ vagy $K$ betű után írt számjegy jelöli a pirossal játszó kezdő-, illetve a kékkel játszó második játékos lépését (például *K3*). A lépéssorozat lépéseit nyíllal ("→") vagy kötőjellel ("-") válasszuk el aszerint, hogy az elválasztó jel előtti lépéssel állított-e csapdát a játékos, vagy sem, vagyis hogy kényszerítő-e a lépés. Egy lépéssorozat akkor ér véget, ha

1. eset: valamelyik játékos létre tudott hozni egy halálos csapdát. Ekkor ő biztosan nyerhet a következő lépésben, a másik játékos viszont nem. Ezt így jelölhetjük egy példában: "P3 (csapda 4, 7) → P nyert". (A "csapda" után írjuk a létrehozott új csapdákat.)
2. eset: mindegyik vonalon található mindkét színű korong, tehát senki sem nyerhet magában az amőbában. Ennek jelölése egy példában: "K4 (döntetlen) → K nyert", hiszen K ezzel megnyeri az eredeti játékot. Néhol a döntetlen előtti utolsó kék lépés, vagy egy azelőtti piros lépés többféle lehet, ezt így jelöljük: "(K3 vagy K4)", illetve lehet, hogy az utolsó piros lépés nem is lényeges (kékkel mindenképp tartható a döntetlen), ennek a jele: "P?".

Az előkészítés után, végre elérkeztünk a lényegi vizsgálódáshoz. Megnézzük, hogy a második játékos milyen lépésekkel érheti el a döntetlent az egyes esetekben, és bemutatunk néhány gyakori vesztő lépést is. Célszerű igazi korongokkal/bábukkal végigpróbálni az eseteket.

1. eset: A kezdő játékos a négyzet egyik sarkát választja. A forgathatóság miatt mindegy, hogy ez melyik, most válasszuk a 6-os sarkot! Másodikként ilyenkor van a legnehezebb dolgunk: csak akkor nem vesztünk biztosan, ha a középső négyzetet, az 5-öst választjuk.

   (a) Ha a második az 1-re vagy a 8-ra lép, akkor az első nyerhet, ha a 2-re tesz. Ahhoz, hogy a második elkerülje az azonnali vereséget, a 7-et kell választania. Az első viszont a 4-esre tesz egy újabb piros korongot, és ezzel halálos csapdát állít, hiszen nem lehet egy lépésben védeni. A második nem tud egy lépésben nyerni, valamint az 5-ös és a 9-es közül sem tud mindkettőre tenni. A kezdő az 5 és 9 közül valamelyikre lép a következő lépésben, és nyer.
   Ugyanez röviden: P6 - K1 - P2 → K7 - P4 (csapda 5, 9) → P nyer.

   Ugyanez zajlik le a 6-5-4 főátlóra tükrözve, ha a második először a 7-est választja az 1-es helyett, vagy a 2-est a 8-as helyett.

   Hasonló a helyzet, ha a második a 4-essel próbálkozik: az első a 2-esre lép, és a menet ugyanaz tükrözve, mintha a második játékos a 8-ast választotta volna.

(b) P6 - K3 - P2 → K7 → P5 (csapda 4, 8) → P nyer. Ha tehát a második a 3-ast választja, akkor az első ugyanúgy teheti a következőt a 2-esre. A második kénytelen a 7-esre lépni, ami után az első "kénytelen" az 5-öst választani. Ezzel viszont kész a halálos csapda a 8-ason és a 4-esen, ami védhetetlen. (Ebben az esetben úgy jött létre a halálos csapda, hogy a kezdő egyben meg is szüntette a második játékos csapdáját). (Sőt, P6 - K3 - P5 → K4 → P8 (csapda 1, 2) → P nyer: ez is jó stratégia a kezdőnek.)

Tükrözve ugyanez a stratégia működik a 3-as helyett a 9-esre.

(c) Most jöhet a második játékos egyetlen helyes lépése: 5.

i. Ha a kezdő ezután az 1-re lép (vagy tükrözve ugyanígy a 7-re), akkor kényszerítő lépések egyszerű sorozata vezet el a döntetlenhez: P6 - K5 - P1 → K8 → P2 → K7 → P3 - (K4 vagy K9) (döntetlen) → K nyer.

ii. Ha a kezdő a 8-ra (vagy tükrözve a 2-re) lép, akkor is hasonló a helyzet: P6 - K5 - P8 → K1 → P9 - K3 → P7 → K2 (döntetlen) → K nyer. Kékkel befejezhető például úgy is, hogy P9 után K2 jön, és kék utolsó lépése (K3 vagy K4).

iii. Ha a kezdő a 3-assal folytatja (vagy 9-essel), akkor is vannak buktatók, de a legegyszerűbb módszer: P6 - K5 - P3 - K8 → P2 → K7 - P? - (K4 vagy K9) (döntetlen) → K nyer.

iv. Talán az a legcselesebb, ha a kezdő a 4-est választja. Jellemzően sarkot jobb választani, mint szélső mezőt, de most a második ne sarkot válasszon, hanem egy tetszőleges szélső négyzetet, például az 1-est. Ekkor P6 - K5 - P4 - K1 → P9 → K2 → P8 → K3 (döntetlen) → K nyer.

*Az 1/c) eset minden részesetében tudjuk tartani a döntetlent, tehát második játékosként ennek a felismerése is elegendő. Az 1/a, b)-ben leírt esetek tipikus hibák lehetnek, ha nem vesszük figyelembe a kezdő erős folytatásait.*

2. eset: A kezdő a négyzet közepét választja (5). Ilyenkor könnyű a döntés: a második veszít, ha szélső mezőre rak, de tarthatja a döntetlent, ha sarkot választ. Ehhez persze itt is körültekintőnek kell lennie.

(a) Ha a második szélső mezőt választ (most az 1-et), akkor: P5 - K1 - P2 → K8 → P6 (csapda 4, 7) → P nyer.

(b) Ha a második - helyesen - sarokba tesz (pl. legyen a 6-os), akkor a következő esetek vannak:

i. Az első játékos egy, a sarokkal szomszédos szélső négyzetet választ, például az 1-est. Kékkel szükséges a 9-est választani: P5 - K6 - P1 → K9 .... Ezután több eset van aszerint, hogy piros hogy folytathatja, de kékkel mindegyik kihozható döntetlenre:

A. Ha piros a 8-ast választja: P5 - K6 - P1 → K9 - P8 → K2 → P4 → K3 (döntetlen) → K nyer.

B. Ha piros a 3-ast választja: P5 - K6 - P1 → K9 - P3 → K7 → P2 → K8 (döntetlen) → K nyer.

C. Ha piros a 7-est választja: P5 - K6 - P1 → K9 - P7 → K3 → P? → (K2 vagy K8) (döntetlen) → K nyer. A végén kéknek már csak a 2-8 átlóra kellett figyelnie.

D. Végül, ha piros a 2-est vagy a 4-est választja, akkor kékkel válasszuk a 8-at, majd a következő kék lépésben a 3-as és a 7-es közül valamelyiket, amelyik szabad, és döntetlen: P5 - K6 - P1 → K9 - (P2 vagy P4) - K8 - P? - (K3 vagy K7) (döntetlen) → K nyer.

   ii. Az első egy, a sarokkal nem szomszédos szélső négyzetet választ, most a 9-est: P5 - K6 - P9 → K1 → P8 → K2 → P7 → K3 (döntetlen) → K nyert.

   iii. Piros egy nem átellenes csúcsot választ, pl. a 2-est: P5 - K6 - P2 → K8 → P1 → K9 - P? - (K3 vagy K7) (döntetlen) → K nyer. Az utolsó előtti lépésben mindegy, hogy a kezdő mit lép (például P3-at), a második játékos eléri a döntetlent.

   iv. A kezdő az átellenes csúcsot (a 4-est) választja. Itt is könnyű hibázni; kékkel csak sarkot választva nyerhetünk, ehhez az iv) variációt kell játszani.

      A. Ha kékkel az 1-est (vagy tükrözve a 7-est) választanánk, akkor P5 - K6 - P4 - K1 → P8 (csapda 2, 3) → P nyer.

      B. Ha kékkel a 3-ast (vagy a 9-est) választanánk, akkor P5 - K6 - P4 - K3 - P2 (csapda 8, 9) → P nyer.

      C. Kékkel csak a 8-as (vagy a 2-es) jó: P5 - K6 - P4 - K8 → P1 → K9 - P? - (K3 vagy K7) (döntetlen) → K nyer.

3. eset: Végül, a kezdő a négyzet egyik szélét is választhatja. Ez most legyen az 1-es. A második játékosnak ilyenkor célszerű megszereznie az 5-ös számot: P1 - K5 ... Ezután viszonylag egyszerű kikényszeríteni a döntetlent: mind a négy esetben megfelel, ha az eredeti szélső mező egyik megfelelő szomszéd sarokmezőjét választjuk.

   (a) Ha pirossal az előző piros négyzet (1) mellé, az egyik sarokba (pl. 6) tesz: P1 - K5 - P6 → K8 → P2 → K7 → P3 - (K4 vagy K9) (döntetlen) → K nyer.

   (b) Ha piros egy szomszédos szélső négyzetet választ (most 7-est), akkor például így kényszeríthető ki a döntetlen: P1 - K5 - P7 - K6 → P4 - K2 → P8 → K3 (döntetlen) → K nyer.

   (c) Ha piros a szemközti szélső négyzetet választja (9): P1 - K5 - P9 - K6 → P4 → K2 (csapda 7, 8) → K nyer; itt kék még meg is nyerné az amőbát.

   (d) Végül, ha a kezdő egy nem szomszédos sarokkal folytatja (pl. 2-vel), akkor : P1 - K5 - P2 - K6 → P4 → K9 - P? - (K3 vagy K8) (döntetlen) → K nyer itt is.

Végignéztük a kezdő játékos összes lehetséges próbálkozását, és arra jutottunk, hogy bármely stratégiája esetén tud olyat lépni a második, amivel véghezviheti a döntetlent elérő stratégiáját. A fenti részletezés alapján már könnyen ki lehet választani a jó lépéseket.
*(A gép kedvenc változata az 1/c/iv) variáció volt.)*