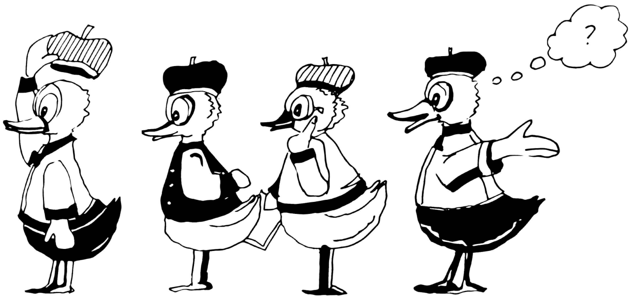
XV. DÜRER VERSENY

Online forduló: 2021. 10. 21.

MATEMATIKA
FELADATSOR



C
KATEGÓRIA
9-10.
osztályosok

Feladatok

C kategória

C-1. Egy ötemeletes épület földszintjén, második és negyedik emeletén 19 szoba van, a többi emeleten 21 szoba. Minden szobának 3 ablaka van. Hány ablak van az épületen?
Egy ötemeletes épület egy földszintből és 5 *további emeletből áll.* (3 pont)

C-2. Benedek kisétált a rétre négylevelű lóheréket keresni. Talált is három kupacot, de nem látta a lóherék szárait, ezért csak azt tudta megszámolni, hogy az egyes kupacokban 42, 37, 32 lóherelevél van. Legalább hány négylevelű lóhere van a három kupacban összesen, ha mindegyik lóherének három vagy négy levele van? (3 pont)

C-3. Anett kapott egy naplót, melybe időnként beleírta, hogy mit csinált aznap. Sajnos a naplót hiányosan vezeti, azaz csak a napokat írja le (a dátumokat nem), és azok közül sem mindegyiket. Marvin elcsente a naplót, amiben a vezetett napok a következőek voltak: szerda ... csütörtök ... kedd ... péntek ... szombat ... szerda ... vasárnap ... szombat ... csütörtök (Dürer online forduló!!)
Ha tudjuk, hogy ma van az online forduló napja, akkor legalább hány nappal ezelőtt kezdte el vezetni a naplóját Anett? (4 pont)

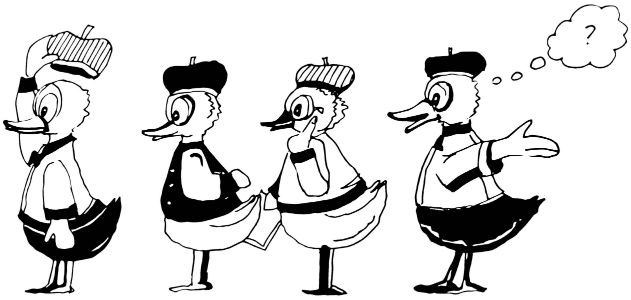
C-4. Csenge rajzolt négy egyenest egy lapra. Ezután Csongi bejelölt négy különböző pontot a lapon, és mindegyik pont mellé odaírta, hogy hány egyenes megy át azon a ponton. Legfeljebb mennyi lehet ennek a négy számnak az összege? (4 pont)

C-5. Anett, Andris és Orsi elmentek biciklizni. Egy 54 kilométeres túrára mennek, és három biciklijük van: sárga, kék és piros. Egy pedálhajtással a kék bicikli 1 métert, a sárga bicikli 2,5 métert, míg a piros bicikli 1,5 métert halad. Anett 1 másodperc alatt 3 pedálfordulatot tud megtenni, Orsi 5-öt, Andris 2-t. Legalább hány perc kell ahhoz, hogy közülük a leglassabb is megérkezzen, ha tetszőlegesen választhatnak biciklit? (4 pont)

XV. DÜRER VERSENY

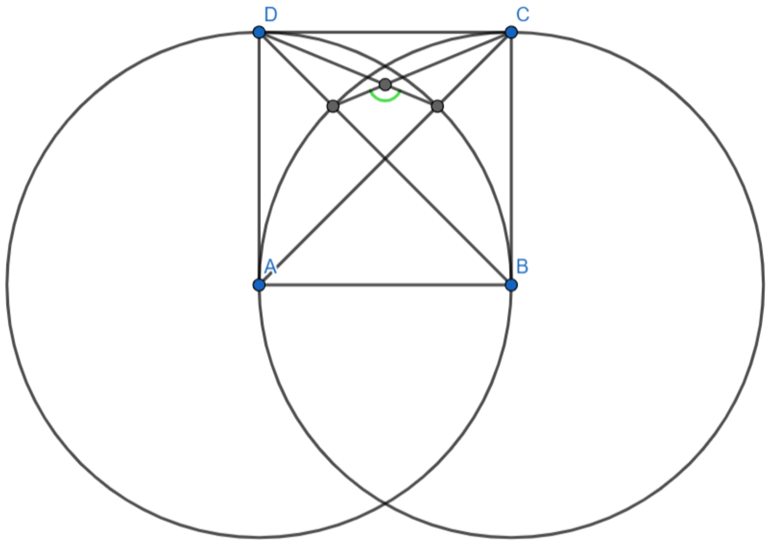
Online forduló: 2021. 10. 21.

MATEMATIKA
FELADATSOR



C
KATEGÓRIA
9-10.
osztályosok

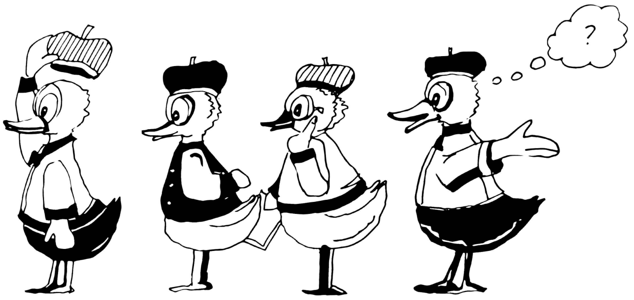
C-6. Hány fokos az ábrán bejelölt szög, ha az ábra úgy készült, hogy az $ABCD$ négyzet A és B csúcsaiból AB sugárral köröket szerkesztettünk, majd ezeknek az átlókkal vett metszéspontjait összekötöttük a C és D csúcsokkal?



(5 pont)

C-7. Egy 1-gyel osztható egyjegyű, egy 2-vel osztható kétjegyű, egy 3-mal osztható háromjegyű és egy 4-gyel osztható négyjegyű pozitív szám összege 5-tel osztható ötjegyű szám. Mekkora a négyjegyű szám lehetséges legkisebb értéke? (5 pont)

C-8. Máté egy dobókockát görget körbe egy négyzetrácson úgy, hogy mindig egy szomszédos lapjára gördíti egy élen keresztül és minden lapja pontosan egyszer szerepel felül. Egy papírra mindig felírja a kocka tetején szereplő számot. Hányféle lehet a Máté papírján szereplő hatjegyű számsorozat, ha tudjuk, hogy a görgetés előtt a kocka tetején az egyes volt? (6 pont)



C-9. Dagobert bácsi egy széfben tárolja a rengeteg pénzét, de nem bízik senkiben, ezért a széf kódját csak ő tudja. Azért, hogy semmiképp ne felejtse el, készít egy trükkös rejtvényt, ahol az üres fehér mezőkbe kell 1-től 9-ig beírni a számokat úgy, hogy mindegyiket pontosan egyszer használhatjuk fel. Ebből a táblázatból a széf kódját úgy kaphatjuk meg, hogy soronként kiolvassuk a három háromjegyű számot és ezeket összeadjuk. Mi Dagobert bácsi kódja?
A táblázatot úgy kell kitölteni, hogy az egyenletek soronként és oszloponként is teljesüljenek.
A / osztást, az × szorzást jelöl. A műveleti sorrendre figyeljetek!

	/		×		=	3
+		×		+		
	/		×		=	28
+		/		−		
	×		+		=	29
=		=		=		
20		1		4		

(6 pont)

C-10. Játék: Azt sokan tudják, hogy egy ló hogy lép a sakktáblán, de azt már nagyon kevesen, hogy egy kacsa hogyan: a négy oldalszomszédos mezőre tud lépni. A két játékos felváltva rak le a 4 × 6-os táblára kacsákat úgy, hogy a lerakott bábu ne üsse a táblán levő kacsák egyikét sem. Az veszít, aki nem tud lépni.
Győzzétek le a gépet kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni. (12 pont)

Megoldókulcs:

C-1.	360	C-4.	9	C-7.	8896
C-2.	3	C-5.	200	C-8.	40
C-3.	29	C-6.	135	C-9.	2124

D kategória

D-1. Benedek kisétált a rétre négylevelű lóheréket keresni. Talált is három kupacot, de nem látta a lóherék szárait, ezért csak azt tudta megszámolni, hogy az egyes kupacokban 42, 37, 32 lóherelevél van. Legalább hány négylevelű lóhere van a három kupacban összesen, ha mindegyik lóherének három vagy négy levele van? (3 pont)

D-2. Anett kapott egy naplót, melybe időnként beleírta, hogy mit csinált aznap. Sajnos a naplót hiányosan vezeti, azaz csak a napokat írja le (a dátumokat nem), és azok közül sem mindegyiket. Marvin elcsente a naplót, amiben a vezetett napok a következőek voltak: szerda ... csütörtök ... kedd ... péntek ... szombat ... szerda ... vasárnap ... szombat ... csütörtök (Dürer online forduló!!)
Ha tudjuk, hogy ma van az online forduló napja, akkor legalább hány nappal ezelőtt kezdte el vezetni a naplóját Anett? (3 pont)

D-3. Anett, Andris és Orsi elmentek biciklizni. Egy 54 kilométeres túrára mennek, és három biciklijük van: sárga, kék és piros. Egy pedálhajtással a kék bicikli 1 métert, a sárga bicikli 2,5 métert, míg a piros bicikli 1,5 métert halad. Anett 1 másodperc alatt 3 pedálfordulatot tud megtenni, Orsi 5-öt, Andris 2-t. Legalább hány perc kell ahhoz, hogy közülük a leglassabb is megérkezzen, ha tetszőlegesen választhatnak biciklit? (4 pont)

D-4. Béluska billentyűzetén az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 billentyűk ebben a sorrendben helyezkednek el egymás mellett. Könnyen legépelhető számnak azt nevezzük, aminek a számjegyei különbözőek és sorban egymás mellett helyezkednek el a billentyűzeten, balról jobbra vagy jobbról balra haladva. Az egyjegyű számok mind könnyen legépelhetők. Béluska szeretne küldeni egy könnyen legépelhető legfeljebb 3-jegyű prímszámot Lizuskának. Hányféle számot küldhet Béluska? (4 pont)

D-5. Egy 1-gyel osztható egyjegyű, egy 2-vel osztható kétjegyű, egy 3-mal osztható háromjegyű és egy 4-gyel osztható négyjegyű pozitív szám összege 5-tel osztható ötjegyű szám. Mekkora a négyjegyű szám lehetséges legkisebb értéke? (4 pont)

D-6. Egy kacsacsalád 10 tagja egy körben áll, ahol a helyek meg vannak jelölve 0-tól 9-ig. Hogy összezavarják a hattyú barátaikat, elkezdik cserélgetni a helyeiket a következőképp: először a 0-s és 1-es helyen állók cserélnek helyet, majd az 1-es és 2-es helyen állók, és így tovább, míg végül a 9-es a 0-s helyen állóval cserél helyet. Ezután ez az egész folyamat ismétlődik az elejétől kezdve újra és újra. Legkevesebb hány csere után fog minden családtag egyszerre az eredeti helyén állni?
(5 pont)

D-7. Az $ABCD$ négyzet oldala 3 egység. Az ábra úgy készült, hogy megrajzoltuk az A,B,C és D középpontú 3 sugarú köröket, valamint az $ABCD$ négyzet két átlóját. Ezen átlók és körök megfelelő metszéspontjai E, F, G, H, I, J, K és L. Mekkora az $EFGH$ és $IJKL$ négyzetek területeinek szorzata?

(5 pont)

D-8. Hattyú Hanna, Hattyú Henrik, Lúd Ludmilla, Lúd Lajos, Lúd László, Kacsa Béluska, Kacsa Lizuska és Donald Kacsa családi fotót szeretne készíteni úgy, hogy két sorban álljanak egymás előtt, mindkettőben négyen, és a magasabbak ne takarják ki az alacsonyabbakat. Tudjuk, hogy minden hattyú 1,5 m minden lúd 1 m, és minden kacsa 0,5 m magas. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
Az egyforma magas állatok is kitakarják egymást. (6 pont)

D-9. Dagobert bácsi egy széfben tárolja a rengeteg pénzét, de nem bízik senkiben, ezért a széf kódját csak ő tudja. Azért, hogy semmiképp ne felejtse el, készít egy trükkös rejtvényt, ahol az üres fehér mezőkbe kell 1-től 9-ig beírni a számokat úgy, hogy mindegyiket pontosan egyszer használhatjuk fel. Ebből a táblázatból a széf kódját úgy kaphatjuk meg, hogy soronként kiolvassuk a három háromjegyű számot és ezeket összeadjuk. Mi Dagobert bácsi kódja?
A táblázatot úgy kell kitölteni, hogy az egyenletek soronként és oszloponként is teljesüljenek.
A / osztást, az × szorzást jelöl. A műveleti sorrendre figyeljetek!

	/		×		=	3
+		×		+		
	/		×		=	28
+		/		−		
	×		+		=	29
=		=		=		
20		1		4		

(6 pont)

D-10. **Játék:** Adott egy kupacban n kavics. A két játékos felváltva vesz el kettőhatvány darab kavicsot a kupacból. Az nyer, aki elveszi az utolsó kavicsot.
Győzzétek le a gépet kétszer egymás után ebben a játékban! A kezdő helyzet ismeretében Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni. (12 pont)

Megoldókulcs:

D-1.	3	D-4.	8	D-7.	81
D-2.	29	D-5.	8896	D-8.	864
D-3.	200	D-6.	90	D-9.	2124

E kategória

E-1. Anett kapott egy naplót, melybe időnként beleírta, hogy mit csinált aznap. Sajnos a naplót hiányosan vezeti, azaz csak a napokat írja le (a dátumokat nem), és azok közül sem mindegyiket. Marvin elcsente a naplót, amiben a vezetett napok a következőek voltak: szerda ... csütörtök ... kedd ... péntek ... szombat ... szerda ... vasárnap ... szombat ... csütörtök (Dürer online forduló!!)
Ha tudjuk, hogy ma van az online forduló napja, akkor legalább hány nappal ezelőtt kezdte el vezetni a naplóját Anett? (3 pont)

E-2. Anett, Andris és Orsi elmentek biciklizni. Egy 54 kilométeres túrára mennek, és három biciklijük van: sárga, kék és piros. Egy pedálhajtással a kék bicikli 1 métert, a sárga bicikli 2,5 métert, míg a piros bicikli 1,5 métert halad. Anett 1 másodperc alatt 3 pedálfordulatot tud megtenni, Orsi 5-öt, Andris 2-t. Legalább hány perc kell ahhoz, hogy közülük a leglassabb is megérkezzen, ha tetszőlegesen választhatnak biciklit? (3 pont)

E-3. Béluska billentyűzetén az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 billentyűk ebben a sorrendben helyezkednek el egymás mellett. Könnyen legépelhető számnak azt nevezzük, aminek a számjegyei különbözőek és sorban egymás mellett helyezkednek el a billentyűzeten, balról jobbra vagy jobbról balra haladva. Az egyjegyű számok mind könnyen legépelhetők. Béluska szeretne küldeni egy könnyen legépelhető legfeljebb 3-jegyű prímszámot Lizuskának. Hányféle számot küldhet Béluska? (4 pont)

E-4. Egy 1-gyel osztható egyjegyű, egy 2-vel osztható kétjegyű, egy 3-mal osztható háromjegyű és egy 4-gyel osztható négyjegyű pozitív szám összege 5-tel osztható ötjegyű szám. Mekkora a négyjegyű szám lehetséges legkisebb értéke? (4 pont)

E-5. Egy kacsacsalád 10 tagja egy körben áll, ahol a helyek meg vannak jelölve 0-tól 9-ig. Hogy összezavarják a hattyú barátaikat, elkezdik cserélgetni a helyeiket a következőképp: először a 0-s és 1-es helyen állók cserélnek helyet, majd az 1-es és 2-es helyen állók, és így tovább, míg végül a 9-es a 0-s helyen állóval cserél helyet. Ezután ez az egész folyamat ismétlődik az elejétől kezdve újra és újra. Legkevesebb hány csere után fog minden családtag egyszerre az eredeti helyén állni?
(4 pont)

E-6. Az $ABCD$ négyzet oldala 3 egység. Az ábra úgy készült, hogy megrajzoltuk az A,B,C és D középpontú 3 sugarú köröket, valamint az $ABCD$ négyzet két átlóját. Ezen átlók és körök megfelelő metszéspontjai E, F, G, H, I, J, K és L. Mekkora az $EFGH$ és $IJKL$ négyzetek területeinek szorzata?

(5 pont)

E-7. Hattyú Hanna, Hattyú Henrik, Lúd Ludmilla, Lúd Lajos, Lúd László, Kacsa Béluska, Kacsa Lizuska és Donald Kacsa családi fotót szeretne készíteni úgy, hogy két sorban álljanak egymás előtt, mindkettőben négyen, és a magasabbak ne takarják ki az alacsonyabbakat. Tudjuk, hogy minden hattyú 1,5 m minden lúd 1 m, és minden kacsa 0,5 m magas. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
Az egyforma magas állatok is kitakarják egymást. (5 pont)

E-8. Csongi nagyon szereti a kacsákat figyelni a tóparton. Megfigyelte, hogy minden kacsa 20 másodpercig víz alá bukik, majd 30 másodpercig kémlel, fejét a vízből kiemelve, majd megint lebukik 20 másodpercre és így tovább. Ma, amikor kiment szokásos napi kacsafigyelésére, lejegyezte hány kacsafejet lát, majd $10, 20, 30$ és 40 másodperc múlva ugyanígy tett. A következő értékek szerepeltek a füzetében: $24, 22, 20, 17, 25$. Hány kacsa van a tóban? (6 pont)

E-9. Dagobert bácsi egy széfben tárolja a rengeteg pénzét, de nem bízik senkiben, ezért a széf kódját csak ő tudja. Azért, hogy semmiképp ne felejtse el, készít egy trükkös rejtvényt, ahol az üres fehér mezőkbe kell 1-től 9-ig beírni a számokat úgy, hogy mindegyiket pontosan egyszer használhatjuk fel. Ebből a táblázatból a széf kódját úgy kaphatjuk meg, hogy soronként kiolvassuk a három háromjegyű számot és ezeket összeadjuk. Mi Dagobert bácsi kódja?
A táblázatot úgy kell kitölteni, hogy az egyenletek soronként és oszloponként is teljesüljenek.
A / osztást, az × szorzást jelöl. A műveleti sorrendre figyeljetek!

	/		×		=	3
+		×		+		
	/		×		=	28
+		/		−		
	×		+		=	29
=		=		=		
20		1		4		

(6 pont)

E-10. Játék: Azt sokan tudják, hogy egy ló hogy lép a sakktáblán, de azt már nagyon kevesen, hogy egy kacsa hogyan: a négy oldalszomszédos mezőre tud lépni. A két játékos felváltva rak le a 4 × 7-es táblára kacsákat úgy, hogy a lerakott bábu ne üsse a táblán levő kacsák egyikét sem. Az veszít, aki nem tud lépni.
Győzzétek le a gépet kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni. (12 pont)

Megoldókulcs:

E-1.	29	E-4.	8896	E-7.	864
E-2.	200	E-5.	90	E-8.	36
E-3.	8	E-6.	81	E-9.	2124

Megoldások

C kategória

C-1. Lentről felfelé haladva, az egyes emeleteken rendre 19, 21, 19, 21, 19 és 21 szoba van. Ez összesen $3 \cdot (19+21) = 3 \cdot 40 = 120$ szoba, és minden szobának 3 ablaka van, ami összesen $120 \cdot 3 = 360$ ablakot jelent.

C-2. A kupacok hármas maradékai rendre 0, 1 és 2. A 4 hármas maradéka 1, ezért az első kupac állhat csupa háromlevelű lóherékből, a másodikban van legalább egy négylevelű, a harmadikban pedig legalább kettő. Ez meg is valósítható: lehet, hogy az első kupac 14 darab háromlevelűből áll, a második kupac egy négylevelűből és 11 darab háromlevelű lóheréből áll, míg a harmadik kupac két négylevelűből és 8 darab háromlevelűből áll. Így összesen legalább 3 négylevelű lóherét talált Benedek.

C-3. Írjuk fel egy táblázatba a napokat hetekre lebontva úgy, hogy ha a vezetett napok lehettek ugyanazon a héten, akkor kezeljük úgy, mintha ugyanazon a héten írta volna a naplóbejegyzést Anett. Világos, hogy ebben az esetben kezdte a legkevesebb nappal ezelőtt a napló írását.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat	Vasárnap
1. hét			x	x			
2. hét		x			x	x	
3. hét			x				x
4. hét						x	
5. hét				Ma			

Látjuk, hogy a Dürer online fordulójáig eltelt legalább 4 hét és egy nap, azaz legalább $4 \cdot 7 + 1 = 29$ nappal ezelőtt kezdte el vezetni a naplóját Anett.

C-4. Ha van olyan pont, amelyen mind a 4 egyenes átmegy, akkor a sík többi pontján csak legfeljebb 1 egyenes megy át, így a 4 pontra a számok összege legfeljebb $4 + 1 + 1 + 1 = 7$. Ha nincs olyan pont, amin átmegy 3 egyenes, akkor legfeljebb $4 \cdot 2 = 8$ lehet az összeg. Az utolsó eset, ha van olyan pont, amelyen pontosan 3 egyenes megy át, akkor más ponton nem mehet át ebből a 3 egyenesből 2, vagyis összesen legfeljebb 2 egyenes megy át bármely másik ponton. Így a 4 pontra összesen legfeljebb $3 + 2 + 2 + 2 = 9$ lehet az összeg. Tehát 9-nél több biztosan nem lehet, és a 9 elérhető, ha 3 egyenes átmegy egy közös ponton, és a negyedik egyenes a másik hármat egy-egy különböző pontban metszi, és a négy metszéspontot jelölte be Csongi. A válasz tehát 9.

C-5. A három biciklit úgy kell szétosztani, hogy az így kapott leglassabban biciklizö ember sebessége a lehető legnagyobb legyen. Ezt úgy érhetjük el, hogy a leglassabb embernek adjuk a leggyorsabb, a második leglassabbnak a második leggyorsabb, a leggyorsabb embernek pedig a leglassabb biciklit. Számoljuk ki tehát, mekkora ezzel a szétosztással a leglasabban biciklizö ember sebessége: Andrisé $2 \cdot 2,5\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$, Anetté $3 \cdot 1,5\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$, Orsié pedig $5 \cdot 1\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$. Vagyis a leglassabb $4,5\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ sebességgel teszi meg az utat, ami $\frac{54000}{4,5}$ s $= 1200$ s $= 200$ percig tart.

C-6. Legyen az A középpontú kör és AC szakasz az ábrán szürkével megjelölt metszéspontja P, legyen a zöld szögnél lévő csúcs Q. Ekkor ADP háromszög egyenlőszárú, hiszen egy kör minden sugara egyenlő hosszú. ADP háromszög A-nál lévő belső szöge 45°, ezért a maradék két szög egyaránt $67,5^\circ$-os. Így $QDC\measuredangle = PDC\measuredangle = 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ$, és ugyanígy $QCD\measuredangle = 22,5^\circ$, amiből az következik, hogy $DQC\sphericalangle = 180^\circ - 22,5^\circ - 22,5^\circ = 135^\circ$. Ennek a csúcsszöge a zölddel megjelölt szög, így az is 135° nagyságú.

C-7.

Legyen az egyjegyű szám a, a kétjegyű szám b, a háromjegyű szám c és a négyjegyű szám d. $a+b+c+d$ ötjegyű, így legalább 10000 az értéke. c háromjegyű és 3-mal osztható, így $c \leq 999$. b kétjegyű és 2-vel osztható, így $b \leq 98$. a egyjegyű, így $a \leq 9$. Tehát $d \geq 10000 - 999 - 98 - 9 = 8894$. De d osztható 4-gyel, így valójában $d \geq 8896$, mert ez a legkisebb 4-gyel osztható szám 8894 után. Ez el is érhető: Legyen $d = 8896$, $c = 999$, $b = 98$, $a = 7$. Ezek kielégítik a feltételeket, és $8896 + 999 + 98 + 7 = 10000$, ami egy ötjegyű, 5-tel osztható szám. Tehát a megoldás 8896.

C-8. Feltehetjük, hogy a kocka szabályosan van számozva, vagyis az egyes lappal szemközt a hatos, a kettessel az ötös, a hármassal pedig a négyes áll. A kocka bármelyik lapjáról bármelyikre tudja görgetni Máté a kockát a szemközti kivételével. Tehát csak azokat a számsorozatokat nem írhatja fel, amelyekben van két szemközti lapon szereplő szám egymás után.

Az első szám az 1-es, tegyük fel, hogy a második felírt szám a 2-es, és számoljuk meg így a szabályos számsorozatokat. Ezt a végén majd 4-gyel kell szorozni, hogy a végeredményt kapjuk, mivel szimmetria miatt ugyanennyi lehetőség lesz azokban az esetekben is amikor a második helyen 3, 4 vagy 5 áll. Négy esetre bontjuk a számolást aszerint, hogy a 6-ost hányadik helyre írta le Máté.

1. eset: A harmadik helyen áll a 6-os. Ekkor mivel a 3-s és a 4-s nincs egymás mellett, így ezek állnak a negyedik és a hatodik helyen valamilyen sorrendben, az 5-ös pedig az ötödik helyen. Ez 2 lehetőség.

2. eset: A negyedik helyen áll a 6-os. Ekkor a harmadik helyen vagy a 3-s vagy a 4-s áll, ez két lehetőség. Mindkét esetben az utolsó két helyen tetszőlegesen megválaszthatjuk a sorrendet, így az megint két lehetőség, ebben az esetben tehát $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség van.

3. eset: Az ötödik helyre kerül a 6-os. Mivel a 3 és a 4 nincs egymás mellett, így nem állhatnak valamilyen sorrendben a harmadik és negyedik helyen. Ám a harmadik helyen az 5-s sem állhat, mert akkor a 2 mellé kerülne, így az 5-s biztosan a negyedik helyen áll. A 3 és a 4 tetszőleges sorrendben lehet a harmadik és hatodik helyen, így ez 2 lehetőség.

4. eset A 6-os az utolsó helyen áll. Ekkor a 3-s és 4-s nem kerülhet egymás mellé, így valamilyen sorrendben a harmadik és ötödik helyre kell hogy kerüljenek, az 5-s pedig kizárásos alapon a negyedik helyre kerül. Ez is két lehetőség.

Így összesen $2 + 4 + 2 + 2 = 10$ lehetőség van, amiben a 2-s áll a második helyen, tehát $4 \cdot 10 = 40$-féle lehet a Máté által felírt számsorozat.

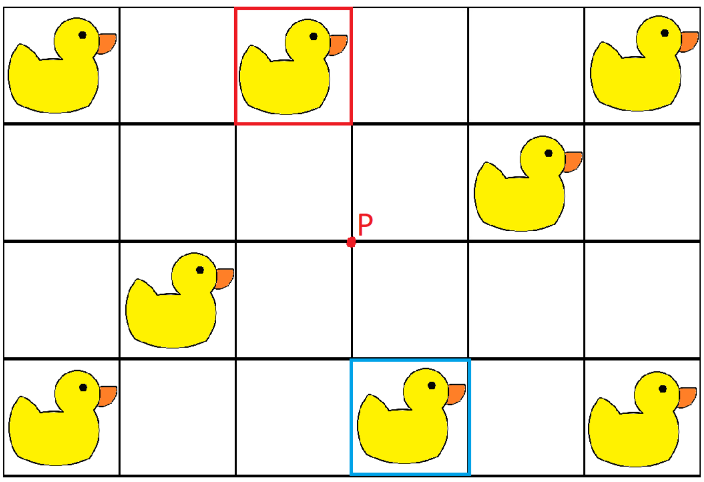
C-9. Nevezzük el az üres mezőket a következő módon.

Először nézzük meg a középső sort. Mivel $D \times F / E = 28$, és $D \times F \leq 72$, ezért $E \leq 2$. Ha $E = 1$, akkor a középső oszlop alapján $B/H = 1$, vagyis $B = H$, ami nem lehetséges. Vagyis $E = 2$, és $D \times F = 56$. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha a két szám a 7 és a 8 valamilyen sorrendben.

Nézzük a középső oszlopot. Ez alapján $B \times 2/H = 1$, vagyis $2B = H$. A jelenleg még szabad számok a következőek: 1, 3, 4, 5, 6, 9. Ez alapján csak a $B = 3$ és $H = 6$ megoldás lehetséges.
Vagyis a négy sarokba az 1, 4, 5 és 9 számok jönnek. Ezekből az alsó sor csak úgy oldható meg, ha $G = 4$ és $I = 5$. Ekkor pedig a felső sarkokba az 1 és a 9 fog jönni.
Most nézzük a bal oldali oszlopot. Mivel $G = 4$, ezért $A + D = 16$. Ez csak úgy jöhet ki, ha a két szám a 7 és a 9. Ebből pedig már meg is kapjuk a hiányzó számokat: $A = 9$, $C = 1$, $D = 7$ és $F = 8$.

A megoldás pedig ez alapján: $931 + 728 + 465 = 2124$.

C-10. A második játékos mindig nyerni tud. Az legyen a stratégiája, hogy akárhova tesz kacsát a kezdőjátékos (piros mező), tükrözze le a tábla P középpontjára középpontosan azt a mezőt, ahová a kezdőjátékos éppen kacsát rakott, és rakjon oda egy kacsát (kék mező). Ez mindig egy szabályos rakás lesz, hiszen ha lenne valamelyik oldalszomszédos mezőben kacsa, akkor az első játékos által lerakott kacsa mellett is lenne kacsa, mivel az ábra középpontosan szimmetrikus. Így a második játékos mindig fog tudni lépni, vagyis neki van nyerő stratégiája, hiszen egy idő után biztosan elfogynak a lehetséges lépések.



D kategória

D-1. A kupacok hármas maradékai rendre 0, 1 és 2. A 4 hármas maradéka 1, ezért az első kupac állhat csupa háromlevelű lóherékből, a másodikban van legalább egy négylevelű, a harmadikban pedig legalább kettő. Ez meg is valósítható: lehet, hogy az első kupac 14 darab háromlevelűből áll, a második kupac egy négylevelűből és 11 darab háromlevelű lóheréből áll, míg a harmadik kupac két négylevelűből és 8 darab háromlevelűből áll. Így összesen legalább 3 négylevelű lóherét talált Benedek.

D-2. Írjuk fel egy táblázatba a napokat hetekre lebontva úgy, hogy ha a vezetett napok lehettek ugyanazon a héten, akkor kezeljük úgy, mintha ugyanazon a héten írta volna a naplóbejegyzést Anett. Világos, hogy ebben az esetben kezdte a legkevesebb nappal ezelőtt a napló írását.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat	Vasárnap
1. hét			x	x			
2. hét		x			x	x	
3. hét			x				x
4. hét						x	
5. hét				Ma			

Látjuk, hogy a Dürer online fordulójáig eltelt legalább 4 hét és egy nap, azaz legalább $4 \cdot 7 + 1 = 29$ nappal ezelőtt kezdte el vezetni a naplóját Anett.

D-3. A három biciklit úgy kell szétosztani, hogy az így kapott leglassabban biciklizō ember sebessége a lehető legnagyobb legyen. Ezt úgy érhetjük el, hogy a leglassabb embernek adjuk a leggyorsabb, a második leglassabbnak a második leggyorsabb, a leggyorsabb embernek pedig a leglassabb biciklit. Számoljuk ki tehát, mekkora ezzel a szétosztással a leglasabban biciklizō ember sebessége: Andrisé $2 \cdot 2,5\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{s}}$, Anetté $3 \cdot 1,5\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{s}}$, Orsié pedig $5 \cdot 1\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{s}}$. Vagyis a leglassabb $4,5\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{s}}$ sebességgel teszi meg az utat, ami $\frac{54000}{4,5}$ s $= 1200$ s $= 200$ percig tart.

D-4. Számoljuk meg a lehetséges számokat a jegyeik száma alapján.
Az egyjegyű számok mind könnyen legépelhetők, közülük a 2, 3, 5 és 7 a prímek, ez 4 darab.
A kétjegyű számokat végigpróbálhatjuk: az alábbi táblázatban felírtuk, hogy közülük melyek prímek, és amelyek nem, ott felírtunk egy valódi osztót is.

Szám	Prím-e?	Szám	Prím-e?
12	nem (2)	10	nem (2)
23	igen	21	nem (3)
34	nem (2)	32	nem (2)
45	nem (5)	43	igen
56	nem (2)	54	nem (2)
67	igen	65	nem (5)
78	nem (2)	76	nem (2)
89	igen	87	nem (3)
		98	nem (2)

Tehát a kétjegyűek között 4 könnyen legépelhető prím van.
Háromjegyű megoldás pedig nincsen, mert ha egy szám három szomszédos számjegyet ($x - 1$, x és $x + 1$) tartalmaz, akkor számjegyeinek összege $3x$, ami 3-mal osztható. Ha egy szám jegyeinek összege 3-mal osztható, akkor pedig maga a szám is, tehát (mivel 3-nál nagyobb) nem lehet prím.

Összesen tehát Béluska $4 + 4 = 8$-féle számot küldhet.

D-5.
Legyen az egyjegyű szám a, a kétjegyű szám b, a háromjegyű szám c és a négyjegyű szám d. $a+b+c+d$ ötjegyű, így legalább 10000 az értéke. c háromjegyű és 3-mal osztható, így $c \leq 999$. b kétjegyű és 2-vel osztható, így $b \leq 98$. a egyjegyű, így $a \leq 9$. Tehát $d \geq 10000 - 999 - 98 - 9 = 8894$. De d osztható 4-gyel, így valójában $d \geq 8896$, mert ez a legkisebb 4-gyel osztható szám 8894 után. Ez el is érhető: Legyen $d = 8896$, $c = 999$, $b = 98$, $a = 7$. Ezek kielégítik a feltételeket, és $8896+999+98+7 = 10000$, ami egy ötjegyű, 5-tel osztható szám. Tehát a megoldás 8896.

D-6. Vegyük észre, hogy az a kacsa aki eredetileg a 0-s helyen áll, minden cserében részt vesz! Így pontosan minden 10. csere után ér vissza a nullás helyre, hiszen n csere után az n szám tízes maradékával jelölt helyen áll.
Azt is láthatjuk, hogy ha 10 cserét elvégzünk a 0-1 cserével kezdve, akkor a 0-s helyen állót leszámítva minden szám eggyel kisebb számmal jelölt helyen fog állni mint a 10 csere előtt állt, kivéve az 1-es, mert az a 9-es helyen fog állni. Ezt úgy is elképzelhetjük, hogy a többiek a 9 darab nem 0-s helyen forognak egyet: a 2-es az 1-es helyre, a 3-as a 2-esre, ..., a 9-es a 8-asra, és az 1-es a 9-esre. Tehát 9 darab ilyen 10 cseréből álló folyamat után a többiek visszaérnek a saját helyükre, így 90 csere után mindenki egyszerre az eredeti helyén fog állni.
A fenti gondolatmenetből az is látszik, hogy ennél kevesebb csere nem elég, hiszen 10-zel oszthatónak kell hogy legyen a cserék száma, hogy a 0-ás helyen álló kacsa a helyére kerüljön, és a 90-nél kisebb 10-zel osztható számokra a többi családtag nem fog az eredeti helyén állni. Így a válasz 90.

D-7. Először is gondoljuk meg, hogy a Pitagorasz-tétel miatt bármely négyzet átlója az oldalhosszának $\sqrt{2}$-szöröse. Innen $AC = 3\sqrt{2}$. Vegyük észre, hogy $AL + JC = AC + JL$, azaz $JL = 2 \cdot 3 - 3\sqrt{2}$, ahonnan adódik, hogy a kis négyzet oldala ennek $\sqrt{2}$-ed része, azaz $3\sqrt{2} - 3$ hosszú. Vegyük észre azt is, hogy $FH = FA + AC + CH = 3 + 3\sqrt{2} + 3 = 6 + 3\sqrt{2}$, tehát a nagy négyzet oldala ennek a $\sqrt{2}$-ed része, azaz $3\sqrt{2} + 3$. Így a négyzetek területeinek szorzata

$$(3\sqrt{2} - 3)^2(3\sqrt{2} + 3)^2 = ((3\sqrt{2} - 3)(3\sqrt{2} + 3))^2 = (18 - 9)^2 = 81.$$

D-8. A 3 kacsának muszáj az első sorban állnia, a két hattyú a hátsó sorban áll, így egy lúd van az első sorban és kettő lúd a hátsóban. Az első sorban álló lúd mögött muszáj hattyúnak állnia, ám emellett csak annyi megkötés van, hogy a kacsák elöl állnak, a többiek hátul, és ekkor már biztosan mindenki látszik.
Háromféleképpen választhatjuk, hogy melyik lúd áll az első sorban, a mögötte lévő hattyú pedig kétféle lehet, és négy lehetőség van, hogy ők melyik oszlopban állnak. Tehát ez $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ lehetőség. Emellett a 3 kacsa az első sorban 6-féleképpen állhat, és a hátsó sorban is 6-féleképpen állhat a megmaradó két lúd és a hattyú. Tehát összesen $24 \cdot 6 \cdot 6 = 864$ lehetőség van.

D-9. Nevezzük el az üres mezőket a következő módon.

Először nézzük meg a középső sort. Mivel $D \times F/E = 28$, és $D \times F \leq 72$, ezért $E \leq 2$. Ha $E = 1$, akkor a középső oszlop alapján $B/H = 1$, vagyis $B = H$, ami nem lehetséges. Vagyis $E = 2$, és $D \times F = 56$. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha a két szám a 7 és a 8 valamilyen sorrendben.
Nézzük a középső oszlopot. Ez alapján $B \times 2/H = 1$, vagyis $2B = H$. A jelenleg még szabad számok a következőek: 1, 3, 4, 5, 6, 9. Ez alapján csak a $B = 3$ és $H = 6$ megoldás lehetséges.
Vagyis a négy sarokba az 1, 4, 5 és 9 számok jönnek. Ezekből az alsó sor csak úgy oldható meg, ha $G = 4$ és $I = 5$. Ekkor pedig a felső sarkokba az 1 és a 9 fog jönni.
Most nézzük a bal oldali oszlopot. Mivel $G = 4$, ezért $A + D = 16$. Ez csak úgy jöhet ki, ha a két szám a 7 és a 9. Ebből pedig már meg is kapjuk a hiányzó számokat: $A = 9$, $C = 1$, $D = 7$ és $F = 8$.

A megoldás pedig ez alapján: $931 + 728 + 465 = 2124$.

D-10. Az első játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha a kavicsok száma nem osztható 3-mal. Ebben az esetben az lesz a stratégiája, hogy mindig annyi kavicsot vesz el, hogy a megmaradó kavicsok száma 3-mal osztható legyen. Ezt mindig meg tudja tenni vagy 1, vagy 2 kavics elvételével ha a kupacban eredetileg 3-mal nem osztható számú kavics volt. A második játékos mindig 3-mal osztható számú kavicsot kap, ebből bármekkora 2-hatványt is vesz el, az ezután kapott mennyiség nem lesz osztható 3-mal. Ha így játszik az első játékos, akkor nem tud veszíteni, mert a második játékos lépése után 3-mal nem osztható számú kavics marad, azaz több, mint 0. Tehát biztosan nyer, mivel a játék véges sok lépésben véget ér.
Amennyiben a kavicsok száma oszható 3-mal, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája, mert az első játékos lépése után 3-mal nem osztható számú kavics marad, innentől a második alkalmazhatja a fent leírt stratégiát.

E kategória

E-1. Írjuk fel egy táblázatba a napokat hetekre lebontva úgy, hogy ha a vezetett napok lehettek ugyanazon a héten, akkor kezeljük úgy, mintha ugyanazon a héten írta volna a naplóbejegyzést Anett. Világos, hogy ebben az esetben kezdte a legkevesebb nappal ezelőtt a napló írását.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat	Vasárnap
1. hét			x	x			
2. hét		x			x	x	
3. hét			x				x
4. hét						x	
5. hét				Ma			

Látjuk, hogy a Dürer online fordulójáig eltelt legalább 4 hét és egy nap, azaz legalább $4 \cdot 7 + 1 = 29$ nappal ezelőtt kezdte el vezetni a naplóját Anett.

E-2. A három biciklit úgy kell szétosztani, hogy az így kapott leglassabban biciklizö ember sebessége a lehető legnagyobb legyen. Ezt úgy érhetjük el, hogy a leglassabb embernek adjuk a leggyorsabb, a második leglassabbnak a második leggyorsabb, a leggyorsabb embernek pedig a leglassabb biciklit. Számoljuk ki tehát, mekkora ezzel a szétosztással a leglasabban biciklizö ember sebessége: Andrisé $2 \cdot 2{,}5\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{s}}$, Anetté $3 \cdot 1{,}5\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{s}}$, Orsié pedig $5 \cdot 1\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{s}}$. Vagyis a leglassabb $4{,}5\frac{\mathtt{m}}{\mathtt{s}}$ sebességgel teszi meg az utat, ami $\frac{54000}{4{,}5}$ s $= 1200$ s $= 200$ percig tart.

E-3. Számoljuk meg a lehetséges számokat a jegyeik száma alapján.
Az egyjegyű számok mind könnyen legépelhetők, közülük a 2, 3, 5 és 7 a prímek, ez 4 darab.
A kétjegyű számokat végigpróbálhatjuk: az alábbi táblázatban felírtuk, hogy közülük melyek prímek, és amelyek nem, ott felírtunk egy valódi osztót is.

Szám	Prím-e?	Szám	Prím-e?
12	nem (2)	10	nem (2)
23	igen	21	nem (3)
34	nem (2)	32	nem (2)
45	nem (5)	43	igen
56	nem (2)	54	nem (2)
67	igen	65	nem (5)
78	nem (2)	76	nem (2)
89	igen	87	nem (3)
		98	nem (2)

Tehát a kétjegyűek között 4 könnyen legépelhető prím van.
Háromjegyű megoldás pedig nincsen, mert ha egy szám három szomszédos számjegyet ($x - 1$, x és $x + 1$) tartalmaz, akkor számjegyeinek összege $3x$, ami 3-mal osztható. Ha egy szám jegyeinek összege 3-mal osztható, akkor pedig maga a szám is, tehát (mivel 3-nál nagyobb) nem lehet prím.
Összesen tehát Béluska $4 + 4 = 8$-féle számot küldhet.

E-4.
Legyen az egyjegyű szám a, a kétjegyű szám b, a háromjegyű szám c és a négyjegyű szám d. $a+b+c+d$ ötjegyű, így legalább 10000 az értéke. c háromjegyű és 3-mal osztható, így $c \leq 999$. b kétjegyű és 2-vel

osztható, így $b \leq 98$. a egyjegyű, így $a \leq 9$. Tehát $d \geq 10000 - 999 - 98 - 9 = 8894$. De d osztható 4-gyel, így valójában $d \geq 8896$, mert ez a legkisebb 4-gyel osztható szám 8894 után. Ez el is érhető: Legyen $d = 8896$, $c = 999$, $b = 98$, $a = 7$. Ezek kielégítik a feltételeket, és $8896 + 999 + 98 + 7 = 10000$, ami egy ötjegyű, 5-tel osztható szám. Tehát a megoldás 8896.

E-5. Vegyük észre, hogy az a kacsa aki eredetileg a 0-s helyen áll, minden cserében részt vesz! Így pontosan minden 10. csere után ér vissza a nullás helyre, hiszen n csere után az n szám tízes maradékával jelölt helyen áll.
Azt is láthatjuk, hogy ha 10 cserét elvégzünk a 0-1 cserével kezdve, akkor a 0-s helyen állót leszámítva minden szám eggyel kisebb számmal jelölt helyen fog állni mint a 10 csere előtt állt, kivéve az 1-es, mert az a 9-es helyen fog állni. Ezt úgy is elképzelhetjük, hogy a többiek a 9 darab nem 0-s helyen forognak egyet: a 2-es az 1-es helyre, a 3-as a 2-esre, ..., a 9-es a 8-asra, és az 1-es a 9-esre. Tehát 9 darab ilyen 10 cseréből álló folyamat után a többiek visszaérnek a saját helyükre, így 90 csere után mindenki egyszerre az eredeti helyén fog állni.
A fenti gondolatmenetből az is látszik, hogy ennél kevesebb csere nem elég, hiszen 10-zel oszthatónak kell hogy legyen a cserék száma, hogy a 0-ás helyen álló kacsa a helyére kerüljön, és a 90-nél kisebb 10-zel osztható számokra a többi családtag nem fog az eredeti helyén állni. Így a válasz 90.

E-6. Először is gondoljuk meg, hogy a Pitagorasz-tétel miatt bármely négyzet átlója az oldalhosszának $\sqrt{2}$-szöröse. Innen $AC = 3\sqrt{2}$. Vegyük észre, hogy $AL + JC = AC + JL$, azaz $JL = 2 \cdot 3 - 3\sqrt{2}$, ahonnan adódik, hogy a kis négyzet oldala ennek $\sqrt{2}$-ed része, azaz $3\sqrt{2} - 3$ hosszú. Vegyük észre azt is, hogy $FH = FA + AC + CH = 3 + 3\sqrt{2} + 3 = 6 + 3\sqrt{2}$, tehát a nagy négyzet oldala ennek a $\sqrt{2}$-ed része, azaz $3\sqrt{2} + 3$. Így a négyzetek területeinek szorzata

$$(3\sqrt{2} - 3)^2(3\sqrt{2} + 3)^2 = ((3\sqrt{2} - 3)(3\sqrt{2} + 3))^2 = (18 - 9)^2 = 81.$$

E-7. A 3 kacsának muszáj az első sorban állnia, a két hattyú a hátsó sorban áll, így egy lúd van az első sorban és kettő lúd a hátsóban. Az első sorban álló lúd mögött muszáj hattyúnak állnia, ám emellett csak annyi megkötés van, hogy a kacsák elöl állnak, a többiek hátul, és ekkor már biztosan mindenki látszik.
Háromféleképpen választhatjuk, hogy melyik lúd áll az első sorban, a mögötte lévő hattyú pedig kétféle lehet, és négy lehetőség van, hogy ők melyik oszlopban állnak. Tehát ez $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ lehetőség. Emellett a 3 kacsa az első sorban 6-féleképpen állhat, és a hátsó sorban is 6-féleképpen állhat a megmaradó két lúd és a hattyú. Tehát összesen $24 \cdot 6 \cdot 6 = 864$ lehetőség van.

E-8. Észrevehető, hogy Csongi minden kacsának a fejét pontosan 3 időpontban látja, és 2 időpontban a kacsa a víz alatt van. Ha n a kacsák száma, akkor emiatt felírható a következő egyenlet:

$$3 \cdot n = 24 + 22 + 20 + 17 + 25 = 108$$

Tehát $n = 36$ kacsa van a tóban.

E-9. Nevezzük el az üres mezőket a következő módon.

Először nézzük meg a középső sort. Mivel $D \times F/E = 28$, és $D \times F \leq 72$, ezért $E \leq 2$. Ha $E = 1$, akkor a középső oszlop alapján $B/H = 1$, vagyis $B = H$, ami nem lehetséges. Vagyis $E = 2$, és $D \times F = 56$. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha a két szám a 7 és a 8 valamilyen sorrendben.
Nézzük a középső oszlopot. Ez alapján $B \times 2/H = 1$, vagyis $2B = H$. A jelenleg még szabad számok a következőek: 1, 3, 4, 5, 6, 9. Ez alapján csak a $B = 3$ és $H = 6$ megoldás lehetséges.
Vagyis a négy sarokba az 1, 4, 5 és 9 számok jönnek. Ezekből az alsó sor csak úgy oldható meg, ha $G = 4$ és $I = 5$. Ekkor pedig a felső sarkokba az 1 és a 9 fog jönni.
Most nézzük a bal oldali oszlopot. Mivel $G = 4$, ezért $A + D = 16$. Ez csak úgy jöhet ki, ha a két szám a 7 és a 9. Ebből pedig már meg is kapjuk a hiányzó számokat: $A = 9$, $C = 1$, $D = 7$ és $F = 8$.

A megoldás pedig ez alapján: $931 + 728 + 465 = 2124$.

E-10. A második játékos mindig nyerni tud. Az legyen a stratégiája, hogy ha az első játékos az első (piros mező) vagy a harmadik sorba rak kacsát a k. oszlopba, akkor ő a harmadik (kék mező) vagy az első sorba rak kacsát a k. oszlopba. Hasonlóan ha az első játékos a második vagy a negyedik sorba rak kacsát a k. oszlopba, akkor ő a negyedik vagy a második sorba rak kacsát a k. oszlopba. Ez mindig egy szabályos rakás lesz, hiszen ha lenne a második játékos által lerakott kacsa mellett kacsa, akkor már az első játékos is kacsa mellé rakott volna, mivel az első és harmadik illetve második és negyedik sorok ugyanúgy néznek ki a második játékos minden lépése után. Így a második játékos mindig fog tudni lépni, vagyis neki van nyerő stratégiája, hiszen egy idő után biztosan elfogynak a lehetséges lépések.