

## INTERNACIONALNO TAKMIČENJE DURER

1. Doroti je priredila zabavu za rođendan Mame Patke i za tu zabavu napravila tortu u obliku valjka. Na zabavi je očekivala 15 osoba, stoga je ucrtavanjem linija podijelila tortu na 15 jednakih kružnih isječaka. Njen brat Donald je, kako bi se s njom našalio, ucrtavanjem linija tortu podijelio na 10 jednakih kružnih isječaka, pri čemu su se neke od njegovih linija preklapale s nekim od Dorotinih. Tik prije nego što su gosti došli, njihov brat Duglas je tortu izrezao po linijama koje su bile ucrtane i stavio u frižider, nakon čega su svi zaboravili na nju. Torte su se sjetili tek kada je na zabavi ostalo 6 osoba, stoga ih je zanimalo mogu li tako izrezanu tortu podijeliti na 6 jednakih porcija bez dodatnog rezanja. Pomozite im da pronađu odgovor na ovo pitanje.

2. U oštrogglom trouglu  $ABC$  tačka  $P$  je centar kružnice koja prolazi kroz  $B$  i dodiruje  $AC$  u  $A$ , a tačka  $Q$  je centar kružnice koja prolazi kroz  $A$  i dodiruje  $BC$  u  $B$ . Neka su  $R$  i  $O$  poluprečnik i centar opisane kružnice trougla  $ABC$ . Dokazati da je  $R^2 = OP \cdot OQ$ .

3. Buha invalid skače u ravni i počinje iz koordinatnog početka  $(0,0)$ . Iz tačke  $(x,y)$  može skočiti u tačku  $(x+p, y+p^2)$  gdje je  $p$  bilo koji pozitivan realan broj (za različite skokove možemo uzimati različito  $p$ ).

a) Postoji li neka tačka u prvom kvadrantu do koje buha invalid ne može doći? (Prvi kvadrant sadrži tačke  $(x,y)$  gdje su  $x, y > 0$ )

b) Koji je minimalan broj skokova potreban da buha invalid da bi iz koordinatnog početka stigla do tačke  $(100,1)$ ?

4. Želimo podijeliti brojeve  $1,2, \dots, 100$  u nekoliko grupa tako da brojevi su brojevi unutar svake grupe ili svi međusobno relativno prosti ili nikoja dva od njih nisu relativno prosti. Koliko nam najmanje grupa treba da bismo ostvarili cilj?

5. a) Gamemaster podijeli 12 igrača u dva tima od po 6. Igrači ne znaju ko je u njihovom timu, ali gamemaster svakom od njih da karticu na kojoj pišu imena dvojice preostalih igrača. Na svačijoj kartici piše ime jednog od njegovih saigrača i jednog od njegovih protivnika, ali gamemaster im ne kaže ko im je protivnik, a ko saigrač. Može li gamemaster napisati imena tako da igrači ako sarađuju mogu otkriti timove?

b) Gamemaster ponovo podijeli igrače i sada im da kartice na kom svakom pišu imena trojice saigrača i jednog protivnika (opet u nasumičnom redoslijedu). Može li u ovom slučaju gamemaster napisati imena tako da igrači ne mogu pogoditi timove?

c) Može li gamemaster napisati imena tako da igrači ne mogu pogoditi timove ako svaka kartica sadrži imena četvorice saigrača i jednog protivnika (ponovo u nasumičnom redoslijedu)?

*Molimo vas zapisujte različite zadatke na različite papire. Na svakom papiru zapišite imena tima i kategoriju.*

*Svaki zadatak vrijedi 12 bodova. Trajanje takmičenja je 180 minuta. Sretno!*

*Organizatori XV Durer takmičenja*