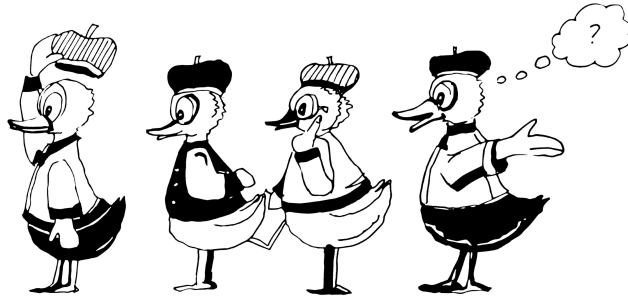




XV. DÜRER
COMPETITION

Competition date:
12th November 2021.

MATHEMATICS
PROBLEMS



E

CATEGORY

1. Dorotea organizira proslavu rođendana mame patke i u tu svrhu napravila je tortu u obliku valjka. Budući da je prvotno očekivala 15 gostiju, nacrtala je rubove 15 jednakih kružnih isječaka kako bi se torta mogla pravedno razrezati. Samo radi zabave, Dorotein brat Donald nacrtao je podjelu na 10 jednakih kružnih isječaka, tako da se neke njegove oznake preklapaju s Doroteinim oznakama. Netom prije dolaska gostiju, Darko je narezao tortu sukladno svim napravljenim oznakama i takvu je tortu vratio u hladnjak.

Od silne zabave, patke su zaboravile na tortu i sjetile su se pojesti ju tek kada ih je ostalo samo šest. Mogu li podijeliti tortu na 6 jednakih dijelova, a da ne režu tortu ponovno?

2. U šiljastokutnom trokutu ABC kružnica koja prolazi točkom B i dira pravac AC u A ima središte u točki P , a kružnica koja prolazi točkom A i dira pravac BC u B ima središte u točki Q . Neka su R i O redom radijus i središte opisane kružnice trokuta ABC . Dokaži da je $R^2 = OP \cdot OQ$.

3. Buha Boško skače po ravnini, počevši u ishodištu $(0, 0)$. Iz točke (x, y) smije skočiti u točku oblika $(x + p, y + p^2)$, pri čemu je p bilo koji pozitivan realan broj. (Vrijednost broja p može se razlikovati za svaki skok.)

a) Postoji li točka u I. kvadrantu koju Boško ne može posjetiti? (I. kvadrant sadrži točke (x, y) za koje su x i y pozitivni realni brojevi.)

b) Koji je minimalan broj skokova koje Boško treba napraviti iz ishodišta kako bi došla do točke $(100, 1)$?

4. Želimo podijeliti brojeve $1, 2, 3, \dots, 100$ na nekoliko grupa tako da je u svakoj grupi ili svaki par brojeva relativno prost ili svaki par nije relativno prost. Koliko je najmanje grupa potrebno za takvu podjelu?

Dva cijela broja su relativno prosta ako nemaju zajedničkog djelitelja većeg od 1.

5. a) Voditelj igre dijeli 12 igrača u dva tima po šestero. Igrači ne znaju kako su određeni timovi, ali voditelj svakom igraču daje karticu s imenima dvojice drugih igrača: jedan od njih njegov je suigrač, a drugi nije, no voditelj ne govori igraču koji je koji. Može li voditelj napisati imena na kartice tako da igrači mogu odrediti timove? (Svi igrači smiju surađivati kako bi to postigli.)

b) Sljedećom prilikom voditelj igre na svaku karticu upisuje imena 3 suigrača i 1 protivničkog igrača (ne nužno tim redosljedom). Sada želi napisati imena tako da igrači zajedno ne mogu odrediti timove. Može li voditelj igre to postići?

c) Može li voditelj napisati imena tako da igrači zajedno ne mogu odrediti timove ako sada svaka kartica sadrži imena 4 suigrača i 1 protivničkog igrača (ne nužno tim redosljedom)?

Rješenja različitih zadataka zapišite na odvojenim papirima. Molimo vas da na svakom papiru pišete samo s jedne strane. Na svakom papiru obavezno napišite ime tima i kategoriju.

Svaki zadatak vrijedi 12 bodova. Natjecanje traje 180 minuta. Sretno!