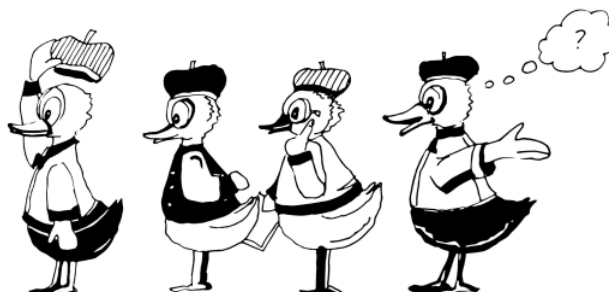




XV. DÜRER
COMPETITION

Competition date:
12th November 2021.

MATHEMATICS
PROBLEMS



E
CATEGORY

بیست و یکم آبان ماه، تهران

سوال یکم- دوروتی¹ برای تولد مادر اردک ها یک میهمانی را برگزار کرد و یک کیک را به شکل استوانه ای آماده کرده است. از آن جا که وی منتظر 15 میهمان بوده، وی کیک را از بالا به قطعات مساوی به همان تعداد تقسیم کرده و جاهایی را که باید برش زده شوند مشخص کرده است. برای تفریح، دونالد² برادر دوروتی، کیک استوانه ای را از بالا به 10 قطعه ی استوانه ای برابر طوری تقسیم می کند که برخی از شعاع هایی که علامت زده بود با محل هایی که دوروتی علامت زده است یک سان هستند. درست پیش از آمدن میهمان ها داگلاس³ کیک را بر مینای همه ی علامت ها برش زده و کیک را در یخچال می گذارد.

میهمان ها کیک را فراموش می کنند و وقتی به یاد می آورند که تنها 6 نفر از آن ها باقی مانده اند. آیا ممکن است که کیک را به 6 قسمت تقسیم کنند بدون این که برش دیگری بزنند؟

سوال دوم- در مثلث حاده الزاویه ی ABC دایره به مرکز P و گذرنده از B بر پاره خط AC در نقطه ی A مماس است، دایره به مرکز Q و گذرنده از A بر پاره خط BC در نقطه ی B مماس است. اگر R, O به ترتیب شعاع و مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشند نشان دهید: $R^2 = OP \cdot OQ$.

سوال سوم- پارافالیا⁴ روی صفحه پرش هایی را انجام می دهد، پرش را از نقطه ی $(0,0)$ آغاز می کند. وی می تواند از نقطه ی (x, y) به نقطه ی $(x + p, y + p^2)$ بپرد که p عددی حقیقی و مثبت است. (مقدار p می تواند برای هر پرش متفاوت باشد).

یکم. آیا نقطه ای در ربع اول وجود دارد که پارافالیا نتواند روی آن بپرد؟ (ربع اول مجموعه ی نقاطی مثل (x, y) می باشد که x, y عددهایی حقیقی و مثبت هستند.)

دوم. کم ترین تعداد پرش ها برای این که پارافالیا می تواند از میدا داشته باشد تا به نقطه ی $(100,1)$ برسد، چند است؟

سوال چهارم- می خواهیم عددهای $1, 2, \dots, 100$ را به چندین دسته تقسیم کنیم به طوری که در هر گروه هر دو عدد یا نسبت به هم اول باشند یا هر دو عدد نسبت به هم اول نباشند. برای چنین افزایی، به دست کم چند گروه نیاز است؟

گوییم دو عدد صحیح نسبت به هم اول هستند اگر عامل مشترکی بزرگ تر از 1 نداشته باشند.

¹ Dorothy

² Donald

³ Douglas

⁴ Paraflea

سوال پنجم- بخش یکم. یک استاد بازی، گروهی از 12 بازیکن را به دو تیم شش نفره تقسیم می کند. بازیکن ها نمی دانند که تیم ها چه هستند، گرچه، استاد به هر بازیکن کارتی را می دهد که شامل نام دوتا از بازیکن هاست: یکی از آن ها هم تیمی است و دیگری خیر، اما استاد به بازیکن ها نمی گوید که هم تیمی یا نا هم تیمی کدام است. آیا استاد می تواند اسامی را طوری روی کارت ها بنویسد که بازیکن ها بتوانند تیم ها را مشخص کنند؟ (همه ی بازیکن ها می توانند برای مشخص کردن تیم ها، هم کاری کنند.)

بخش دوم. در یک موقعیت دیگر، استاد بازی، روی هر کارت نام سه هم تیمی و یک بازیکن از تیم مقابل را(احتمالاً به صورت نامرتب) می نویسد. اکنون وی می خواهد این کار را طوری انجام بدهد که بازی کن ها با کمک یک دیگر نتوانند تیم ها را مشخص کنند. آیا وی می تواند این کار را انجام بدهد؟

بخش سوم. اگر این بار هر کارت شامل 4 هم تیمی و 1 نفر از تیم مقابل(احتمالاً به صورت نامرتب) باشد، آیااستاد بازی، می تواند اسامی را طوری بنویسد که بازیکن ها با کمک یک دیگر نتوانند تیم ها را مشخص کنند؟

لطفا راه حل سوالات را در صفحات جداگانه ای بنویسید. اطمینان حاصل کنید که نام تیم خود و نام رده ی مسابقه را روی هر صفحه نوشته اید.

هر پرسش مسابقه 12 امتیاز دارد. زمان مسابقه 180 دقیقه است. موفق باشید!

برگزار کنندگان پانزدهمین مسابقه ی دیورر.