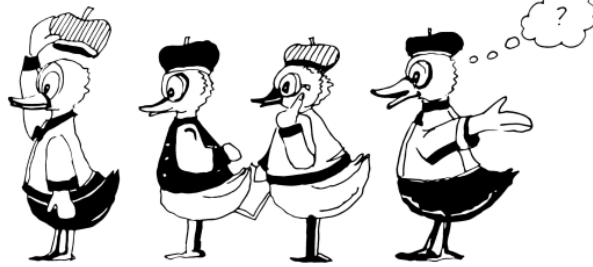




XV. DÜRER
COMPETITION

Competition date:
12th November 2021.

MATHEMATICS
PROBLEMS



E+
CATEGORY

بیست و یکم آبان ماه، تهران

سوال یکم- می خواهیم عددهای $1, 2, \dots, 100$ را به چندین دسته تقسیم کنیم به طوری که در هر گروه هر دو عدد یا نسبت به هم اول باشند یا هر دو عدد نسبت به هم اول نباشند. برای چنین آفرازی، به دست کم چند گروه نیاز است؟

گوییم دو عدد صحیح نسبت به هم اول هستند اگر عامل مشترکی بزرگ تر از 1 نداشته باشند.

سوال دوم- همه ی مثلث هایی را پیدا کنید که بتوانیم با یک برش به دو قطعه ی هم نهشت تقسیم شان کنیم. یک برش شامل پاره خط هایی به شکل $P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ می باشد که نقطه های P_1, \dots, P_n متمایز هستند، نقطه های P_1 و P_n روی محیط مثلث قرار گرفته اند و باقی نقطه ها طوری داخل مثلث قرار گرفته اند که پاره خط ها از هم جدا (نامتقاطع) باشند، مگر در نقاط انتهایی و ابتدایی.

سوال سوم- بخش یکم. یک استاد بازی، گروهی از 40 بازیکن را به چهار تیم ده نفره تقسیم می کند. بازیکن ها نمی دانند که تیم ها چه هستند، گرچه، استاد به هر بازیکن کارتی را می دهد که شامل نام دوتا از بازیکن هاست: یکی از آن ها هم تیمی است و دیگری خیر، اما استاد به بازیکن ها نمی گوید که هم تیمی یا نا هم تیمی کدام است. آیا استاد می تواند اسامی را طوری روی کارت ها بنویسد که بازیکن ها بتوانند تیم ها را مشخص کنند؟ (همه ی بازیکن ها می توانند برای مشخص کردن تیم ها، هم کاری کنند.)

بخش دوم. در یک موقعیت دیگر، استاد بازی، روی هر کارت نام هفت هم تیمی و دو بازیکن از تیم مقابل را (احتمالاً به صورت نامرتب) می نویسد. اکنون وی می خواهد این کار را طوری انجام بدهد که بازی کن ها با کمک یک دیگر نتوانند تیم ها را مشخص کنند. آیا وی می تواند این کار را انجام بدهد؟

بخش سوم. اگر این بار هر کارت شامل 6 هم تیمی و 2 نفر از تیم مقابل (احتمالاً به صورت نامرتب) باشد، آیا استاد بازی، می تواند اسامی را طوری بنویسد که بازیکن ها با کمک یک دیگر نتوانند تیم ها را مشخص کنند؟

سوال چهارم- هرگاه مثلث ABC مثلثی حاده الزاویه باشد و F_A, F_B به ترتیب وسط های اضلاع BC, AC باشند. نقطه های E, F محل تلاقی دو دایره هستند که نخستین آن ها به مرکز F_A از نقطه ی A گذر می کند و دومین آن ها به مرکز F_B از نقطه ی B گذر می کند. نشان دهید اگر نقطه های N, M به ترتیب وسط پاره خط های CE, CF باشند، درین صورت محل تلاقی دایره ای به مرکز M که از E می گذرد و دایره ی به مرکز N که از نقطه ی F می گذرد، روی پاره خط AB قرار می گیرد.

سوال پنجم- هرگاه $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ عددهایی حقیقی باشند به طوری که تساوی

$$\sum_{i=1}^n a_i^{2k+1} = 0$$

برای همه ی عددهای $0 \leq k < n$ برقرار باشد. نشان دهید برای هر $1 \leq i \leq n$ خواهیم داشت: $a_i = -a_{n+1-i}$.

لطفا راه حل سوالات را در صفحات جداگانه ای بنویسید. اطمینان حاصل کنید که نام تیم خود و نام رده ی مسابقه را روی هر صفحه نوشته اید.

هر پرسش مسابقه 12 امتیاز دارد. زمان مسابقه 180 دقیقه است. موفق باشید!

برگزار کنندگان پانزدهمین مسابقه ی دیورر.