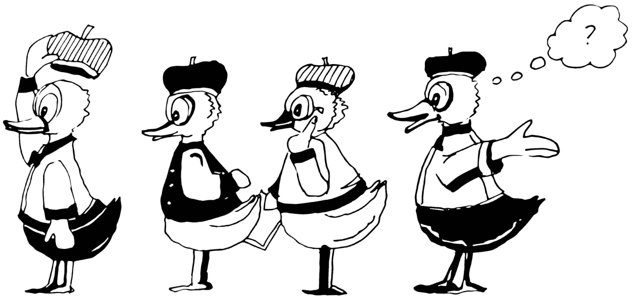
XV. DÜRER VERSENY

Helyi forduló: 2021. november 12.

MATEMATIKA

FELADATSOR



C

KATEGÓRIA

9-10. osztályosok

---

1. Egy egyenes út mentén valamilyen sorrendben helyezkedik el az alábbi öt város: Bácsfeketehegy, Kishegyes, Petrőc, Sóvé és Topolya. Minden városnak van egy hadserege, ami bármely két város esetén különböző számú katonából áll. Egy város azoknak a városoknak tud üzenetet küldeni, amelyekhez el tud jutni a hadserege az úton úgy, hogy nem halad át olyan városon, aminek a serege nagyobb. Vigyázat, az üzenet küldésének képessége nem feltétlenül kölcsönös. A következőket tudjuk:

- Bácsfeketehegynek csak egy szomszédja van, és a serege nagyobb, mint Sóvé város serege;
- Kishegyesnek 4830 főből álló serege van, és nem tud üzenetet küldeni Bácsfeketehegyre;
- Petrőc városának a legkisebb a serege, de ennek ellenére tud üzenetet küldeni Topolyára;
- Sóvé az úton a negyedik helyen álló várossal szomszédos, és Bácsfeketeheggyel kölcsönösen tudnak egymásnak üzenetet küldeni;
- Topolya a második város az út mentén, és a seregének létszáma 16171 fő.

a) Az út mentén milyen sorrendben helyezkednek el a városok?
b) Soroljátok fel a városokat a hadseregük létszáma szerint csökkenő sorrendben.
A megoldásotokat indokoljátok is.

2. Kacsamama születésnapjára Kacsanna családi összejövetelt szervezett, melyre egy henger alakú tortát sütött. Eredetileg 15 vendégre számított Kacsanna, ezért ennyi egyenlő körcikkre osztotta a torta tetejét, bejelölve, hogy hol kell majd felvágni. Kacsanna öccse, Kacsattila az asztalon maradt torta tetejét azonban szórakozásból 10 egyenlő körcikkre való felosztással is ellátta úgy, hogy lettek olyan sugarai a torta tetejének, melyet mindketten bejelöltek. Mielőtt megjöttek a vendégek, Kacsaladár felvágta az összes jelölés mentén a tortát, majd berakta a hűtőbe.
A tortáról megfeledkeztek, és csak az összejövetel végén jutott eszükbe megenni, amikor már csak hatan voltak jelen. Szét tudják-e osztani az egész tortát 6 egyenlő részre úgy, hogy nem vághatják további részekre a meglévő szeleteket?

3. Tudjuk, hogy a, b, c különböző pozitív egész számok, melyekre $a \mid b \cdot c$, $b \mid a \cdot c$ és $c \mid a \cdot b$, továbbá $a + b + c$ prímszám.
a) Adjatok példát ilyen a, b, c számhármasra.
b) Igazoljátok, hogy $a \cdot b \cdot c$ négyzetszám minden ilyen számhármas esetén.
A $k \mid n$ jelölés azt jelenti, hogy n osztható k-val.

4. Az ABC háromszögbe beírtuk a $DEFG$ téglalapot úgy, hogy D és E az AB oldalra esnek, F a BC oldalon fekszik, és G az AC oldalon van. Tudjuk, hogy AF felezi a BAC szöget, valamint $\frac{AD}{DE} = \frac{1}{2}$. Mekkora a CAB szög?

5. Benedek kitöltött egy 3×3-as táblázatot az $1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7$ számokkal. Ezek után egy papírra felírta minden oldalszomszédos mezőpárra a bennük szereplő számok összegét. Így összesen 12 szám került a papírra. Azt vette észre, hogy csupa különböző számot írt le.
a) Mutassatok egy ilyen kitöltést.
b) Van-e olyan kitöltés, amelyre ha az eddigi 12 összeg mellett még minden sornak és minden oszlopnak is felírja az összegét, akkor az így kapott 18 szám is csupa különböző lesz?

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma.
Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XV. Dürer Verseny szervezői