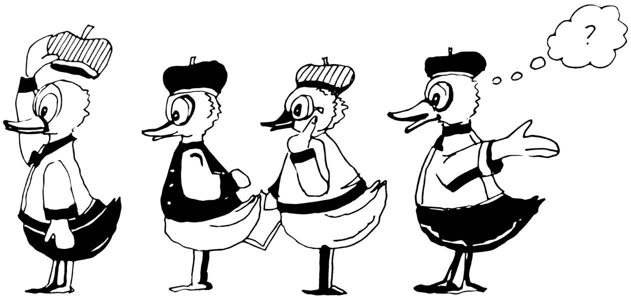
XV. DÜRER VERSENY

Helyi forduló: 2021. november 12.

MATEMATIKA

MEGOLDÁSOK



C

KATEGÓRIA

9-10. osztályosok

C1. Egy egyenes út mentén valamilyen sorrendben helyezkedik el az alábbi öt város: Bácsfeketehegy, Kishegyes, Petrőc, Sóvé és Topolya. Minden városnak van egy hadserege, ami bármely két város esetén különböző számú katonából áll. Egy város azoknak a városoknak tud üzenetet küldeni, amelyekhez el tud jutni a hadserege az úton úgy, hogy nem halad át olyan városon, aminek a serege nagyobb. Vigyázat, az üzenet küldésének képessége nem feltétlenül kölcsönös. A következőket tudjuk:

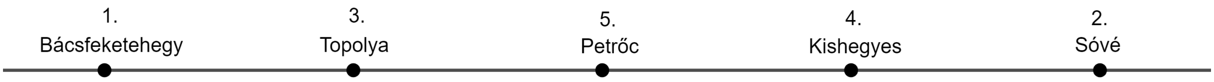
- Bácsfeketehegynek csak egy szomszédja van, és a serege nagyobb, mint Sóvé város serege;
- Kishegyesnek 4830 főből álló serege van, és nem tud üzenetet küldeni Bácsfeketehegyre;
- Petrőc városának a legkisebb a serege, de ennek ellenére tud üzenetet küldeni Topolyára;
- Sóvé az úton a negyedik helyen álló várossal szomszédos, és Bácsfeketeheggyel kölcsönösen tudnak egymásnak üzenetet küldeni;
- Topolya a második város az út mentén, és a seregének létszáma 16171 fő.

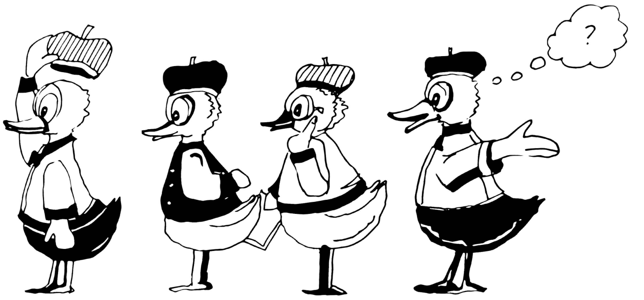
a) Az út mentén milyen sorrendben helyezkednek el a városok?
b) Soroljátok fel a városokat a hadseregük létszáma szerint csökkenő sorrendben.
A megoldásotokat indokoljátok is.

Megoldás:

a) Az utolsó pontból tudjuk, hogy Topolya a második város. Most nézzük meg, mit tudunk Bácsfeketehegy, Petrőc és Sóvé helyéről. Az első állításból kiderül, hogy Bácsfeketehegy vagy az első, vagy az ötödik az út mentén. A harmadik állítás alapján a legkisebb sereggel rendelkező Petrőc tud üzenni Topolyára, ami azt jelenti, hogy Topolya csak a szomszédja lehet, így Petrőc az első vagy a harmadik az úton. A negyedik állítás alapján pedig Sóvé a harmadik vagy ötödik helyen van.
Összefoglalva eddig: Bácsfeketehegy: 1. vagy 5., Kishegyes: ?, Petrőc: 1. vagy 3., Sóvé: 3. vagy 5., Topolya: 2.
Így tehát Bácsfeketehegy, Petrőc és Sóvé mind az első, a harmadik és az ötödik hely valamelyikét foglalhatja csak el. Emiatt a negyedik város biztosan Kishegyes.
A második állítás szerint Kishegyes nem tud üzenni Bácsfeketehegyre, így nem lehetnek szomszédosak, tehát Bácsfeketehegy csak az első város lehet az út mentén. Emiatt az ötödik város csak Sóvé lehet, így a harmadik Petrőc.

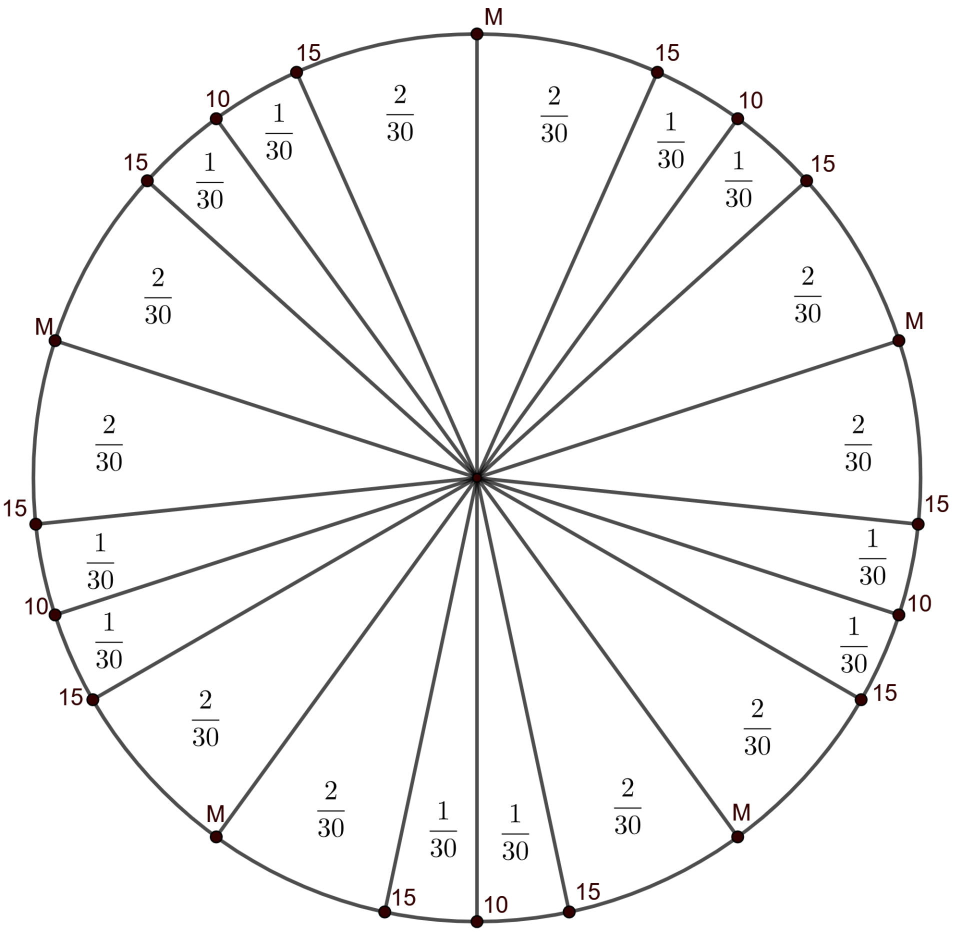
b) Tudjuk, hogy Kishegyes egy 4830, Topolya pedig egy 16171 fős hadsereggel rendelkezik. A harmadik állítás szerint Petrőc, azaz a harmadik város rendelkezik a legkisebb sereggel, így a hadserege létszáma kevesebb, mint 4830. A negyedik állítás alapján Bácsfeketehegy és Sóvé, azaz a két szélső város kölcsönösen tud egymással üzenetet váltani, azaz mindkettejük serege több, mint 16171 fős. Az első állítás szerint pedig kettejük seregei közül Bácsfeketehegyé a nagyobb. Így a városok hadseregének létszámsorrendje a legmagasabbtól kezdve: Bácsfeketehegy, Sóvé, Topolya, Kishegyes, Petrőc.





C2. Kacsamama születésnapjára Kacsanna családi összejövetelt szervezett, melyre egy henger alakú tortát sütött. Eredetileg 15 vendégre számított Kacsanna, ezért ennyi egyenlő körcikkre osztotta a torta tetejét, bejelölve, hogy hol kell majd felvágni. Kacsanna öccse, Kacsattila az asztalon maradt torta tetejét azonban szórakozásból 10 egyenlő körcikkre való felosztással is ellátta úgy, hogy lettek olyan sugarai a torta tetejének, melyet mindketten bejelöltek. Mielőtt megjöttek a vendégek, Kacsaladár felvágta az összes jelölés mentén a tortát, majd berakta a hűtőbe.
A tortáról megfeledkeztek, és csak az összejövetel végén jutott eszükbe megenni, amikor már csak hatan voltak jelen. Szét tudják-e osztani az egész tortát 6 egyenlő részre úgy, hogy nem vághatják további részekre a meglévő szeleteket?

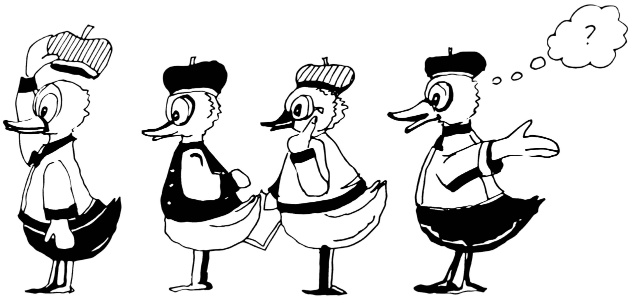
Megoldás:



Igen, szét tudják. Az ábrán látható a felszeletelés. M-mel vannak jelölve azok a vágások, amik mindkét felosztásban vannak, valamint 10-zel és 15-tel azok a vágások amik csak a 10 illetve 15 részre vágáshoz tartozó felosztásban szerepelnek. Vegyük észre, hogy 3 szomszédos szelet a 15 részre vágásból ugyanakkora, mint 2 szomszédos szelet a 10 részre vágásból, és ez pont a torta egyötöde, így 5 olyan jelölés is van, ami mindkét felosztásban benne van. Egyszerűség kedvéért tekintsünk a tortára, mint egy körre, és legyen a torta területe 1. Látni fogjuk, hogy minden tortaszelet mérete az $\frac{1}{30}$ többszöröse, így mindig harmincadokban számolunk.

Nézzünk két szomszédos M betűs vágást. Az ezek közötti részt a 15-ös vágások 3 egyenlő részre osztják, és a középső szeletet a 10-es vágás két egyenlő részre osztja. Így a két M-es vágás között összesen két darab $\frac{2}{30}$ méretű szelet van, és két darab $\frac{1}{30}$ méretű. A torta 5 ugyanilyen blokkból áll, így összesen a torta 10 darab $\frac{1}{30}$ méretű és 10 darab $\frac{2}{30}$ méretű részre lett felosztva.

Ha 6 ember akar igazságosan osztozkodni, akkor mindenkinek $\frac{5}{30}$-ad tortát kell kapnia. Ez pedig tényleg elintézhető: négy ember két darab nagy szeletet ($\frac{2}{30}$ mérteű) és egy kis szeletet ($\frac{1}{30}$ méretű) kap, míg a további két embernek három kis szelet és egy nagy szelet jut.



C3. Tudjuk, hogy a, b, c különböző pozitív egész számok, melyekre $a \mid b \cdot c$, $b \mid a \cdot c$ és $c \mid a \cdot b$, továbbá $a+b+c$ prímszám.

a) Adjatok példát ilyen a, b, c számhármasra.

b) Igazoljátok, hogy $a \cdot b \cdot c$ négyzetszám minden ilyen számhármas esetén.

A $k \mid n$ jelölés azt jelenti, hogy n osztható k-val.

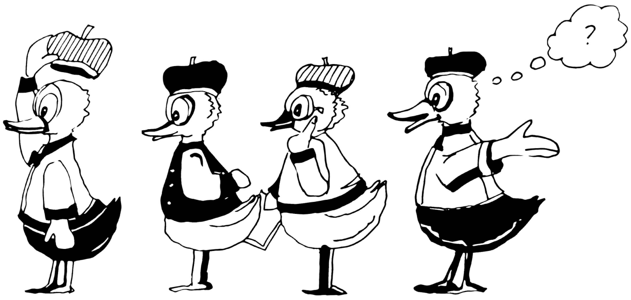
Megoldás: a) Például az $a = 2$, b =3, $c = 6$ számhármas megoldás, hiszen $2 \mid 3 \cdot 6$, $3 \mid 2 \cdot 6$, és $6 \mid 2 \cdot 3$ egyaránt teljesül, és az összegük $2 + 3 + 6 = 11$, ami prímszám.

b) Tekintsünk egy tetszőleges p prímet, amely osztja a, b, c közül legalább az egyiket. Jelölje x, y, z rendre a p kitevőjét az a, b, c számok prímtényezős felbontásában. x, y, z ekkor természetes számok, amelyek közül legalább az egyik pozitív.

Az nem lehetséges, hogy x, y és z is pozitív legyen, mivel akkor a, b és c is osztható lenne a p prímmel. Ekkor $a + b + c$ egy olyan p-vel osztható szám lenne, amely viszont nagyobb p-nél: $a + b + c \geq 3p > p$, így az összegük nem lenne prím, ellentmondásban a feladat állításával. Emiatt van olyan szám a, b, c között, amelyben p kitevője 0. Legyen ez a szám a. (Ha nem a lenne az, hanem például c, akkor a feladat nem változik, ha a és c értékét felcseréljük.)

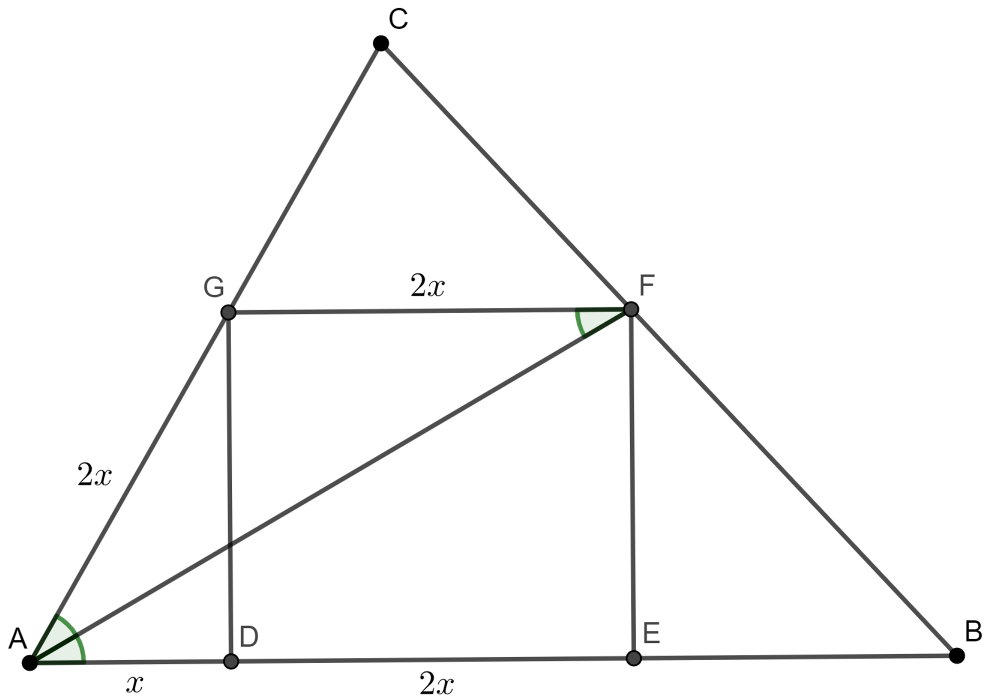
Most vizsgáljuk meg, hogy a kitevőkre nézve mit mondanak a feladat oszthatósági állításai. Általánosan igaz, hogy egy p prím kitevője egy $a \cdot b$ szorzatban az a-beli és a b-beli kitevői összege. p kitevője a-ban 0, b-ben y, c-ben pedig z, így az $a \cdot b$ szorzatban p kitevője $0 + y = y$, $a \cdot c$-ben $0 + z = z$, és $b \cdot c$-ben $y + z$. Mivel $b \mid ac$, ezért p kitevője b-ben legfeljebb akkora lehet, mint ac-ben, tehát $y \leq z$. Hasonlóképpen, $c \mid ab$ miatt c-ben legfeljebb akkora lehet a kitevője, mint ab-ben, vagyis $z \leq y$. Tehát $y = z$.

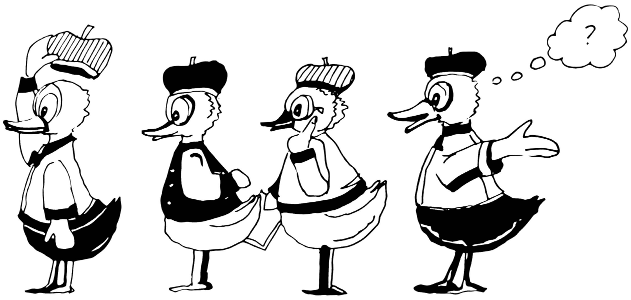
Azt kaptuk, hogy bármely p prím, amely osztja a-t, b-t vagy c-t, pontosan az egyik számot nem osztja a három közül, a másik két szám prímtényezős felbontásában pedig azonos kitevőn szerepel. Így p az abc szorzat prímtényezős felbontásában $x + y + z = 0 + y + y = 2y$-adik hatványon szerepel, ami páros. Az abc szorzat minden prímtényezője osztja a-t, b-t vagy c-t, így az abc szorzatban minden ilyen prímosztó páros kitevőn szerepel. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy abc négyzetszám.



C4. Az ABC háromszögbe beírtuk a $DEFG$ téglalapot úgy, hogy D és E az AB oldalra esnek, F a BC oldalon fekszik, és G az AC oldalon van. Tudjuk, hogy AF felezi a BAC szöget, valamint $\frac{AD}{DE} = \frac{1}{2}$. Mekkora a CAB szög?

Megoldás: A megoldás során felülvonással jelöljük egy szakasz hosszát. Legyen $\overline{AD} = x$, így a feladat feltételéből adódóan $\overline{DE} = 2x$. Mivel $DEFG$ négyszög téglalap, ezért a szemköztes oldalai egyenlő hosszúságúak, amiből $\overline{GF} = 2x$ következik. Mivel AF a háromszög belső szögfelezője, így $GAF\sphericalangle = FAE\sphericalangle$. A párhuzamosság miatt ugyanez a szög megjelenik váltószögként, $FAE\sphericalangle = AFG\sphericalangle$. Az egyenlő nagyságú szögek miatt AGF háromszög egyenlőszárú, azaz $\overline{AG} = 2x$. Most vizsgáljuk az ADG háromszöget: van egy derékszöge D-nél, és az átfogója éppen kétszerese az egyik befogónak. Ebből következően ez egy szabályos háromszög fele, az úgynevezett félszabályos háromszög; tehát az A-nál lévő belső szöge éppen $60°$. A feladat kérdésére így a válasz: $CAB\sphericalangle = 60°$.





C5. Benedek kitöltött egy 3×3-as táblázatot az $1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7$ számokkal. Ezek után egy papírra felírta minden oldalszomszédos mezőpárra a bennük szereplő számok összegét. Így összesen 12 szám került a papírra. Azt vette észre, hogy csupa különböző számot írt le.
a) Mutassatok egy ilyen kitöltést.
b) Van-e olyan kitöltés, amelyre ha az eddigi 12 összeg mellett még minden sornak és minden oszlopnak is felírja az összegét, akkor az így kapott 18 szám is csupa különböző lesz?

Megoldás: a) Az alábbi táblázat egy lehetéséges kitöltést mutat.

1	2	5
1	4	7
3	6	7

Ennek helyességét könnyen ellenőrizhetjük. Vízszintesen az összegek: $1+2=3$, $2+5=7$, $1+4=5$, $4+7=11$, $3+6=9$ és $6+7=13$. Függőlegesen pedig: $1+1=2$, $1+3=4$, $2+4=6$, $4+6=10$, $5+7=12$ és $7+7=14$. Azaz valóban csupa különböző összeget kaptunk.

b) Nem, nincs ilyen kitöltés. A legkisebb lehetséges kéttagú összeg az $1+1=2$, míg a legnagyobb a $7+7=14$. Tehát ez a 12 darab összeg 2 és 14 közé esik.

A táblázatba írt számok összege 36, így a sorösszegek átlaga 12. Ezért van olyan sor, amelyikben a számok összege legfeljebb 12, hiszen az átlag legalább akkora, mint a legkisebb átlagolandó. Hasonló érveléssel élhetünk oszlopok esetén is, azaz van olyan oszlop, amelyikben a számok összege legfeljebb 12.

Tehát a 12 darab mezőpárhoz tartozó összeg, továbbá legalább egy sor- és legalább egy oszlopösszeg is 2 és 14 közé esik, ez azonban csak 13 különböző számot jelent. Így a skatulyaelv miatt nem lehet mind a 14 fenti összeg különböző.