



1. Egy egyenes út mentén valamilyen sorrendben helyezkedik el az alábbi öt város: Bácsfeketehegy, Kishegyes, Petróc, Sóvé és Topolya. Minden városnak van egy hadserege, ami bármely két város esetén különböző számú katonából áll. Egy város azoknak a városoknak tud üzenetet küldeni, amelyekhez el tud jutni a hadserege az úton úgy, hogy nem halad át olyan városon, aminek a serege nagyobb. Vagyazat, az üzenet küldésének képessége nem feltétlenül kölcsönös. A következőket tudjuk:

- Topolya városnak csak egy szomszédja van, és a serege nagyobb, mint Petrócé;
- Sóvé nem tud üzenetet küldeni sem Topolyának, sem Kishegyesnek;
- Bácsfeketehegy serege 3945 fős, és tud üzenni Kishegyesnek;
- Petróc az úton a negyedik helyen álló várossal szomszédos, és Petróc serege nagyobb, mint Bácsfeketehegy serege;
- Topolya és Petróc kölcsönösen tudnak egymásnak üzenetet küldeni;
- Kishegyes város serege 4830 főt számlál.

- a) Az út mentén milyen sorrendben helyezkednek el a városok?  
b) Soroljátok fel a városokat a hadseregük létszáma szerint csökkenő sorrendben.  
*A megoldásokat indokoljátok is.*

2. Tudjuk, hogy  $a, b, c$  különböző pozitív egész számok, melyekre  $a \mid b \cdot c$ ,  $b \mid a \cdot c$  és  $c \mid a \cdot b$ , továbbá  $a + b + c$  prímszám.

- a) Adjatok példát ilyen  $a, b, c$  számhármásra.  
b) Igazoljátok, hogy  $a \cdot b \cdot c$  négyzetszám minden ilyen számhármás esetén.  
*A  $k \mid n$  jelölés azt jelenti, hogy  $n$  osztható  $k$ -val.*

3. Az  $ABC$  háromszögbe beírtuk a  $DEFG$  téglalapot úgy, hogy  $D$  és  $E$  az  $AB$  oldalra esnek,  $F$  a  $BC$  oldalon fekszik, és  $G$  az  $AC$  oldalon van. Tudjuk, hogy  $AF$  felezi a  $BAC$  szöget, valamint  $\frac{AD}{DE} = \frac{1}{2}$ . Mekkora a  $CAB$  szög?

4. Benedek kitöltött egy  $3 \times 3$ -as táblázatot az 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7 számokkal. Ezek után egy papírra felírta minden oldalszomszédos mezőpárra a bennük szereplő számok összegét. Így összesen 12 szám került a papírra. Azt vette észre, hogy csupa különböző számot írt le.

- a) Mutassatok egy ilyen kitöltést.  
b) Van-e olyan kitöltés, amelyre ha az eddigi 12 összeg mellett még minden sornak és minden oszlopnak is felírja az összegét, akkor az így kapott 18 szám is csupa különböző lesz?

5. Az 1, 2, 3, ..., 100 számokat legkevesebb hány csoportba lehet felosztani úgy, hogy minden csoporton belül vagy bármely két szám relatív prím, vagy bármely két szám nem relatív prím legyen?

*Két szám akkor relatív prím, ha nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk. A megoldásokat indokoljátok is.*

*Mindegyik megoldást külön lapra írájátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szereshető. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!*