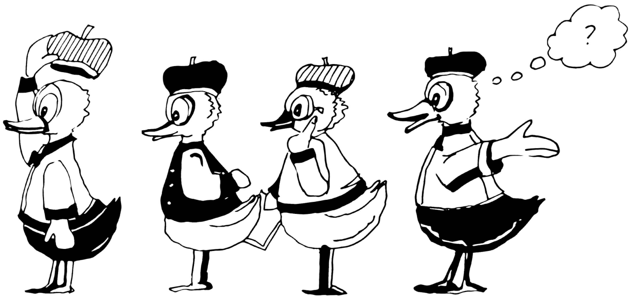
XV. DÜRER VERSENY

Helyi forduló: 2021. november 12.

MATEMATIKA

MEGOLDÁSOK



D

KATEGÓRIA

9-12. osztályosok

D1. Egy egyenes út mentén valamilyen sorrendben helyezkedik el az alábbi öt város: Bácsfeketehegy, Kishegyes, Petrőc, Sóvé és Topolya. Minden városnak van egy hadserege, ami bármely két város esetén különböző számú katonából áll. Egy város azoknak a városoknak tud üzenetet küldeni, amelyekhez el tud jutni a hadserege az úton úgy, hogy nem halad át olyan városon, aminek a serege nagyobb. Vigyázat, az üzenet küldésének képessége nem feltétlenül kölcsönös. A következőket tudjuk:

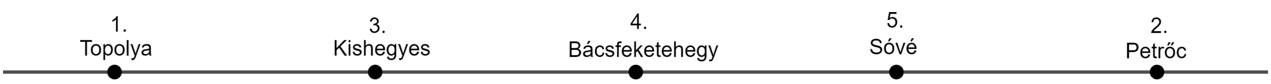
- Topolya városnak csak egy szomszédja van, és a serege nagyobb, mint Petrőcé;
- Sóvé nem tud üzenetet küldeni sem Topolyának, sem Kishegyesnek;
- Bácsfeketehegy serege 3945 fős, és tud üzenni Kishegyesnek;
- Petrőc az úton a negyedik helyen álló várossal szomszédos, és Petrőc serege nagyobb, mint Bácsfeketehegy serege;
- Topolya és Petrőc kölcsönösen tudnak egymásnak üzenetet küldeni;
- Kishegyes város serege 4830 főt számlál.

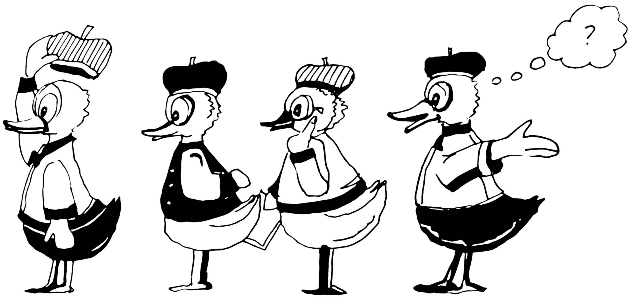
a) Az út mentén milyen sorrendben helyezkednek el a városok?
b) Soroljátok fel a városokat a hadseregük létszáma szerint csökkenő sorrendben.
A megoldásotokat indokoljátok is.

Megoldás:

a) Az első pontból tudjuk, hogy Topolya az első vagy az ötödik település lehet, a negyedik pontból pedig azt, hogy Petrőc a harmadik vagy az ötödik. Bácsfeketehegy serege kisebb, mint Petrőcé (4. állítás), de tud üzenetet küldeni Kishegyesnek (3. állítás), ezért mindkét település Petrőc ugyanazon oldalán helyezkedik el. Ha Petrőc a harmadik lenne, akkor az előző megfigyelés miatt Kishegyesnek és Bácsfeketehegynek egymás mellett kellene lenniük az első-második vagy a negyedik-ötödik helyen valamilyen sorrendben. Ez viszont nem lehet, mert ekkor Sóvé szomszédos lenne Topolyával, így tudna neki üzenetet küldeni, ami ellentmond a 2. állításnak. Innen tudjuk, hogy Topolya az első, Petrőc pedig az ötödik város. Sóvé nem szomszédos sem Topolyával, sem Kishegyessel és nem áll a szélén, ezért a két szomszédja csak Petrőc és Bácsfeketehegy lehet. Tehát Sóvé a negyedik az úton és Bácsfeketehegy a harmadik, így kizárásos alapon Kishegyes a második. A végső sorrend: Topolya, Kishegyes, Bácsfeketehegy, Sóvé, Petrőc.

b) Topolya és Petrőc a két szélső város, de tudnak üzenetet küldeni egymásnak (5. állítás), ezért ez a két legnépesebb sereggel rendelkező város, és a kettő közül pedig Topolyáé a nagyobb (1. állítás). A megadott adatok alapján tudjuk, hogy Kishegyesnek nagyobb a serege, mint Bácsfeketehegyé, továbbá Sóvé nem tud üzenetet küldeni Kishegyesnek (2. állítás), ezért a serege kisebb, mint Bácsfeketehegyé, ami köztük fekszik. Ez alapján a városok a hadseregük létszámja szerint csökkenő sorrendben: Topolya, Petrőc, Kishegyes, Bácsfeketehegy, Sóvé.





D2. Tudjuk, hogy a, b, c különböző pozitív egész számok, melyekre $a \mid b \cdot c$, $b \mid a \cdot c$ és $c \mid a \cdot b$, továbbá $a + b + c$ prímszám.
a) Adjatok példát ilyen a, b, c számhármasra.
b) Igazoljátok, hogy $a \cdot b \cdot c$ négyzetszám minden ilyen számhármas esetén.
A $k \mid n$ jelölés azt jelenti, hogy n osztható k-val.

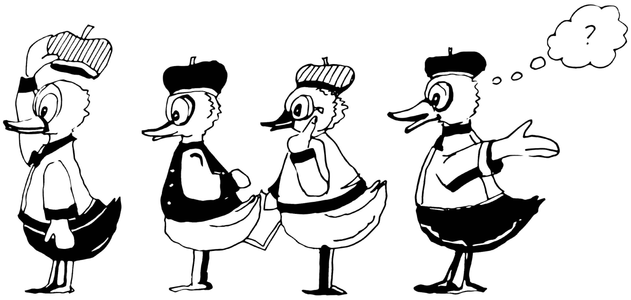
Megoldás: a) Például az $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$ számhármas megoldás, hiszen $2 \mid 3 \cdot 6$, $3 \mid 2 \cdot 6$, és $6 \mid 2 \cdot 3$ egyaránt teljesül, és az összegük $2 + 3 + 6 = 11$, ami prímszám.

b) Tekintsünk egy tetszőleges p prímet, amely osztja a, b, c közül legalább az egyiket. Jelölje x, y, z rendre a p kitevőjét az a, b, c számok prímtényezős felbontásában. x, y, z ekkor természetes számok, amelyek közül legalább az egyik pozitív.

Az nem lehetséges, hogy x, y és z is pozitív legyen, mivel akkor a, b és c is osztható lenne a p prímmel. Ekkor $a + b + c$ egy olyan p-vel osztható szám lenne, amely viszont nagyobb p-nél: $a + b + c \geq 3p > p$, így az összegük nem lenne prím, ellentmondásban a feladat állításával. Emiatt van olyan szám a, b, c között, amelyben p kitevője 0. Legyen ez a szám a. (Ha nem a lenne az, hanem például c, akkor a feladat nem változik, ha a és c értékét felcseréljük.)

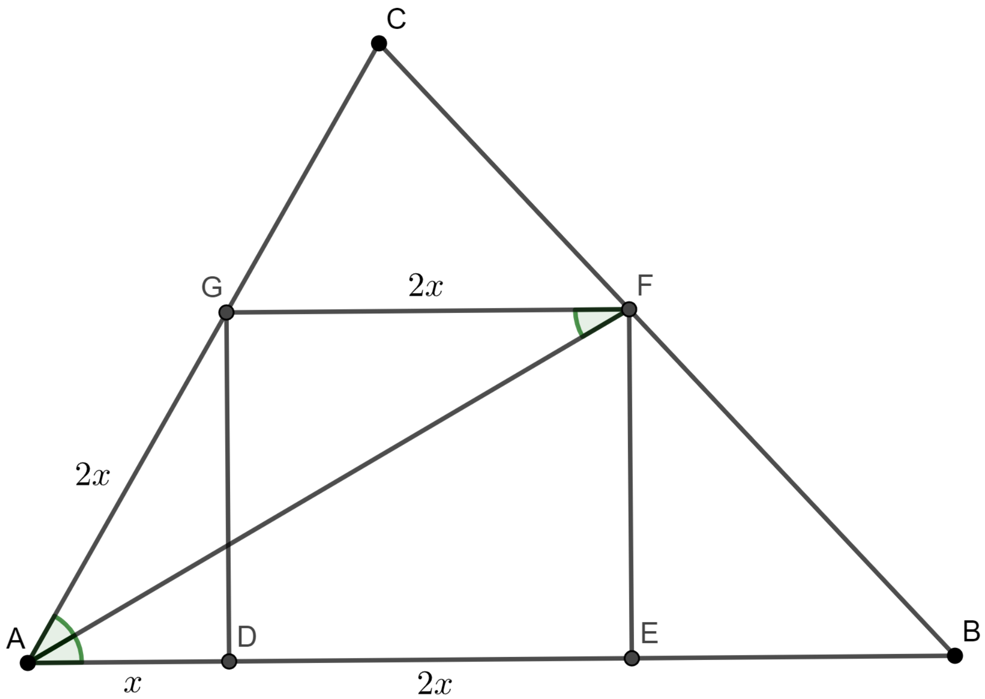
Most vizsgáljuk meg, hogy a kitevőkre nézve mit mondanak a feladat oszthatósági állításai. Általánosan igaz, hogy egy p prím kitevője egy $a \cdot b$ szorzatban az a-beli és a b-beli kitevői összege. p kitevője a-ban 0, b-ben y, c-ben pedig z, így az $a \cdot b$ szorzatban p kitevője $0 + y = y$, $a \cdot c$-ben $0 + z = z$, és $b \cdot c$-ben $y + z$. Mivel $b \mid ac$, ezért p kitevője b-ben legfeljebb akkora lehet, mint ac-ben, tehát $y \leq z$. Hasonlóképpen, $c \mid ab$ miatt c-ben legfeljebb akkora lehet a kitevője, mint ab-ben, vagyis $z \leq y$. Tehát $y = z$.

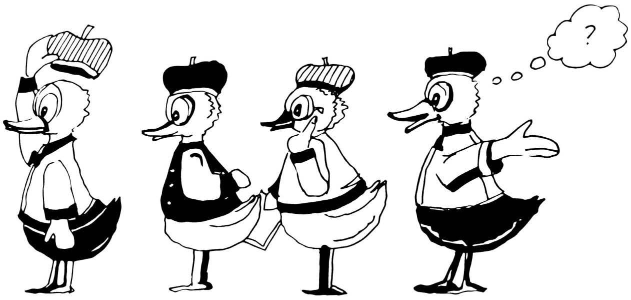
Azt kaptuk, hogy bármely p prím, amely osztja a-t, b-t vagy c-t, pontosan az egyik számot nem osztja a három közül, a másik két szám prímtényezős felbontásában pedig azonos kitevőn szerepel. Így p az abc szorzat prímtényezős felbontásában $x + y + z = 0 + y + y = 2y$-adik hatványon szerepel, ami páros. Az abc szorzat minden prímtényezője osztja a-t, b-t vagy c-t, így az abc szorzatban minden ilyen prímosztó páros kitevőn szerepel. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy abc négyzetszám.



D3. Az ABC háromszögbe beírtuk a $DEFG$ téglalapot úgy, hogy D és E az AB oldalra esnek, F a BC oldalon fekszik, és G az AC oldalon van. Tudjuk, hogy AF felezi a BAC szöget, valamint $\frac{AD}{DE} = \frac{1}{2}$. Mekkora a CAB szög?

Megoldás: A megoldás során felülvonással jelöljük egy szakasz hosszát. Legyen $\overline{AD} = x$, így a feladat feltételéből adódóan $\overline{DE} = 2x$. Mivel $DEFG$ négyszög téglalap, ezért a szemköztes oldalai egyenlő hosszúságúak, amiből $\overline{GF} = 2x$ következik. Mivel AF a háromszög belső szögfelezője, így $GAF\sphericalangle = FAE\sphericalangle$. A párhuzamosság miatt ugyanez a szög megjelenik váltószögként, $FAE\sphericalangle = AFG\sphericalangle$. Az egyenlő nagyságú szögek miatt AGF háromszög egyenlőszárú, azaz $\overline{AG} = 2x$. Most vizsgáljuk az ADG háromszöget: van egy derékszöge D-nél, és az átfogója éppen kétszerese az egyik befogónak. Ebből következően ez egy szabályos háromszög fele, az úgynevezett félszabályos háromszög; tehát az A-nál lévő belső szöge éppen $60°$. A feladat kérdésére így a válasz: $CAB\sphericalangle = 60°$.





D4. Benedek kitöltött egy 3×3-as táblázatot az $1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7$ számokkal. Ezek után egy papírra felírta minden oldalszomszédos mezőpárra a bennük szereplő számok összegét. Így összesen 12 szám került a papírra. Azt vette észre, hogy csupa különböző számot írt le.
a) Mutassatok egy ilyen kitöltést.
b) Van-e olyan kitöltés, amelyre ha az eddigi 12 összeg mellett még minden sornak és minden oszlopnak is felírja az összegét, akkor az így kapott 18 szám is csupa különböző lesz?

Megoldás: a) Az alábbi táblázat egy lehetséges kitöltést mutat.

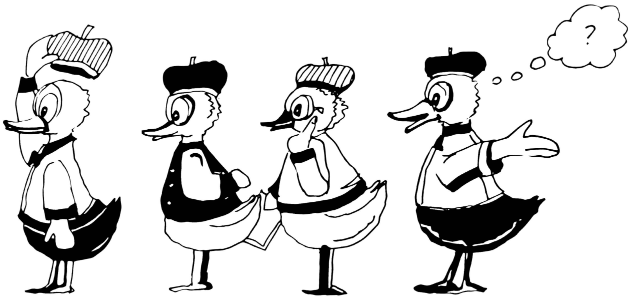
1	2	5
1	4	7
3	6	7

Ennek helyességét könnyen ellenőrizhetjük. Vízszintesen az összegek: $1 + 2 = 3$, $2 + 5 = 7$, $1 + 4 = 5$, $4 + 7 = 11$, $3 + 6 = 9$ és $6 + 7 = 13$. Függőlegesen pedig: $1 + 1 = 2$, $1 + 3 = 4$, $2 + 4 = 6$, $4 + 6 = 10$, $5 + 7 = 12$ és $7 + 7 = 14$. Azaz valóban csupa különböző összeget kaptunk.

b) Nem, nincs ilyen kitöltés. A legkisebb lehetséges kéttagú összeg az $1 + 1 = 2$, míg a legnagyobb a $7 + 7 = 14$. Tehát ez a 12 darab összeg 2 és 14 közé esik.

A táblázatba írt számok összege 36, így a sorösszegek átlaga 12. Ezért van olyan sor, amelyikben a számok összege legfeljebb 12, hiszen az átlag legalább akkora, mint a legkisebb átlagolandó. Hasonló érveléssel élhetünk oszlopok esetén is, azaz van olyan oszlop, amelyikben a számok összege legfeljebb 12.

Tehát a 12 darab mezőpárhoz tartozó összeg, továbbá legalább egy sor- és legalább egy oszlopösszeg is 2 és 14 közé esik, ez azonban csak 13 különböző számot jelent. Így a skatulyaelv miatt nem lehet mind a 14 fenti összeg különböző.



D5. Az $1, 2, 3, \ldots, 100$ számokat legkevesebb hány csoportba lehet felosztani úgy, hogy minden csoporton belül vagy bármely két szám relatív prím, vagy bármely két szám nem relatív prím legyen?
Két szám akkor relatív prím, ha nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk. A megoldásotokat indokoljátok is.

Megoldás: 5 csoportra fel lehet osztani a számokat, mégpedig a következőképpen: az első csportba kerüljenek a 2-vel osztható számok, a másodikba azok a hárommal osztható számok, amiket nem tettünk bele az első csoportba. A harmadik kupacba rakjuk azokat a számokat, amik 5-tel oszthatóak, de sem az első, sem a második kupacban nem szerepelnek, a negyedikbe azokat, amik 7-tel oszthatóak, de semmelyik előző csoportba sem kerültek, végül az utolsó csoportba kerüljenek az eddig kimaradt számok. Az első négy csoport jól láthatóan olyan, hogy bármely csoport bármely két tagjára igaz, hogy van 1-nél nagyobb közös osztójuk, mégpedig rendre a 2, a 3, az 5, illetve a 7. Az ötödik kupacról azt fogjuk igazolni, hogy bármely 2 szám benne relatív prím. Valójában ebben a kupacban csak prímek és az 1 szerepelnek. Vegyünk ugyanis egy n összetett számot. Ekkor n legkisebb prímtényezője a $2, 3, 5, 7$ valamelyike kell legyen, hiszen $11^2 > 100$. Vagyis n benne van az első négy kupac valamelyikében. A kimaradó prímszámok és az 1 pedig valóban olyan kupacot alkotnak, melyben a tagok páronként relatív prímek, így ez egy helyes felosztás.

Most belátjuk, hogy nem lehet kevesebb csoportra bontani a számokat. Indirekten csináljuk, tegyük fel, hogy fel lehet bontani 4 csoportra az első 100 számot a megadott módon. Ekkor a $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ számok közül skatulyaelv szerint valamelyik kettőnek egy csoportban kell szerepelnie. Ekkor azonban ebben a csoportban bármely két számnak kell lennie 1-nél nagyobb közös osztójának. A $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ számoknak csak 2-es szerepel a prímtényezős felbontásában, így ebben a csoportban mindenki páros kell legyen. Feltehetjük, hogy az összes páros számot beleraktuk ebbe a kupacba. Maradt tehát 3 másik kupac a páratlan számok szétosztására.

Hasonló módon a $3, 3^2, 3^3, 3^4$ számokat véve azt találjuk, hogy van olyan csoport, amiben minden szám 3-mal osztható, ebbe feltehtjük, hogy az összes 3-mal osztható páratlan számot belepakoltuk. Így két kupac maradt.

Az $5, 7, 5^2, 7^2, 5 \cdot 7$ számok közül skatulyaelv szerint valamelyik 3-nak egy kupacba kell kerülnie. Mivel nincs ezek közül három, amik páronkét relatív prímek, így ebben a kupacban bármely két szám nem relatív prím. Ám a fenti öt számból csak két olyan számhármas van, amiben páronként nem relatív prímek a számok. Az egyik a $7, 7^2, 7 \cdot 5$, ekkor az $5, 5^2$ számok a másik csoportba kerülnek, mert relatív prímek a 7-tel, illetve hasonlóan az a másik eset, ha az $5, 5^2, 7 \cdot 5$ kerül az egyik kupacba, és a $7, 7^2$ számok pedig szükségszerűen a másikba. Mindkét esetben igaz az, hogy mindkét kupacban bármely két számnak van 1-nél nagyobb közös osztója, ekkor azonban az 1 maga például semmelyik kupacba sem kerülhet, ami ellentmondás. Így valóban szükség van legalább 5 kupacra.