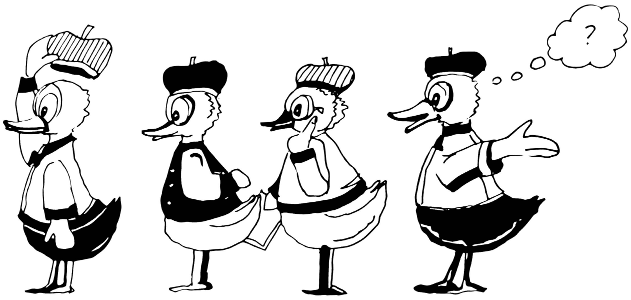
XV. DÜRER VERSENY

Helyi forduló:
2021. november 12.

MATEMATIKA
FELADATSOR



E

KATEGÓRIA

9-12. osztályosok

---

1. Kacsamama születésnapjára Kacsanna családi összejövetelt szervezett, melyre egy henger alakú tortát sütött. Eredetileg 15 vendégre számított Kacsanna, ezért ennyi egyenlő körcikkre osztotta a torta tetejét, bejelölve, hogy hol kell majd felvágni. Kacsanna öccse, Kacsattila az asztalon maradt torta tetejét azonban szórakozásból 10 egyenlő körcikkre való felosztással is ellátta úgy, hogy lettek olyan sugarai a torta tetejének, melyet mindketten bejelöltek. Mielőtt megjöttek a vendégek, Kacsaladár felvágta az összes jelölés mentén a tortát, majd berakta a hűtőbe.
A tortáról megfeledkeztek, és csak az összejövetel végén jutott eszükbe megenni, amikor már csak hatan voltak jelen. Szét tudják-e osztani az egész tortát 6 egyenlő részre úgy, hogy nem vághatják további részekre a meglévő szeleteket?

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben a B-n átmenő és az AC egyenest A-ban érintő kör középpontja legyen P, az A-n átmenő és a BC egyenest B-ben érintő kör középpontja legyen Q. Az ABC háromszög köréírt körének sugara legyen R, középpontja O. Lássátok be, hogy $R^2 = OP \cdot OQ$.

3. Parabolha ugrál a síkon az origóból indulva. Egy lépésében ha az (x, y) ponton áll, akkor az $(x + p, y + p^2)$ pontra ugorhat, ahol p egy pozitív valós szám. (A p szám értéke az egyes lépésekben akár eltérő is lehet.)
a) Van-e olyan pontja a első síknegyednek, amibe nem tud eljutni a bolha? (Az első síknegyed azon (x, y) pontokat tartalmazza, melyekre x és y pozitív valós számok.)
b) Legalább hányat kell ugrania az origóból, hogy eljusson a $(100, 1)$ pontba?

4. Az $1, 2, 3, \ldots, 100$ számokat legkevesebb hány csoportba lehet felosztani úgy, hogy minden csoporton belül vagy bármely két szám relatív prím, vagy bármely két szám nem relatív prím legyen?
Két szám akkor relatív prím, ha nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk.

5. a) Egy 12 fős társaságot egy játékhoz a játékmester két egyenlő csoportra oszt. A játékmester nem árulja el a teljes csapatokat, hanem minden játékos egy cetlin megkapja két játékostársának a nevét, akik közül az egyik a csapattársa, a másik pedig az ellenfél csapatban van, de nem tudja, hogy melyik melyik. Tud-e a játékmester olyan cetliket adni, melyekből a játékosok közösen ki tudják találni, hogy hogyan vannak felosztva a csapatok?

b) A következő alkalommal a játékmester minden cetlire 3 csapattárs és 1 ellenfél nevét írja rá összekeverve. Most úgy akarja megírni a cetliket, hogy a játékosok közösen ne tudják kitalálni a két csapatot. Meg tudja-e ezt tenni?

c) Tud-e úgy cetliket írni, hogy ne tudják kitalálni közösen a játékosok a csapatokat, ha most 4 csapattárs és 1 ellenfél neve kerül egy cetlire összekeverve?

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XV. Dürer Verseny szervezői