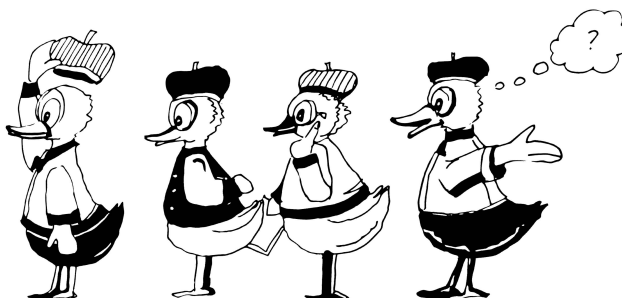


XV. DÜRER VERSENY

Helyi forduló:
2021. november 12.

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK



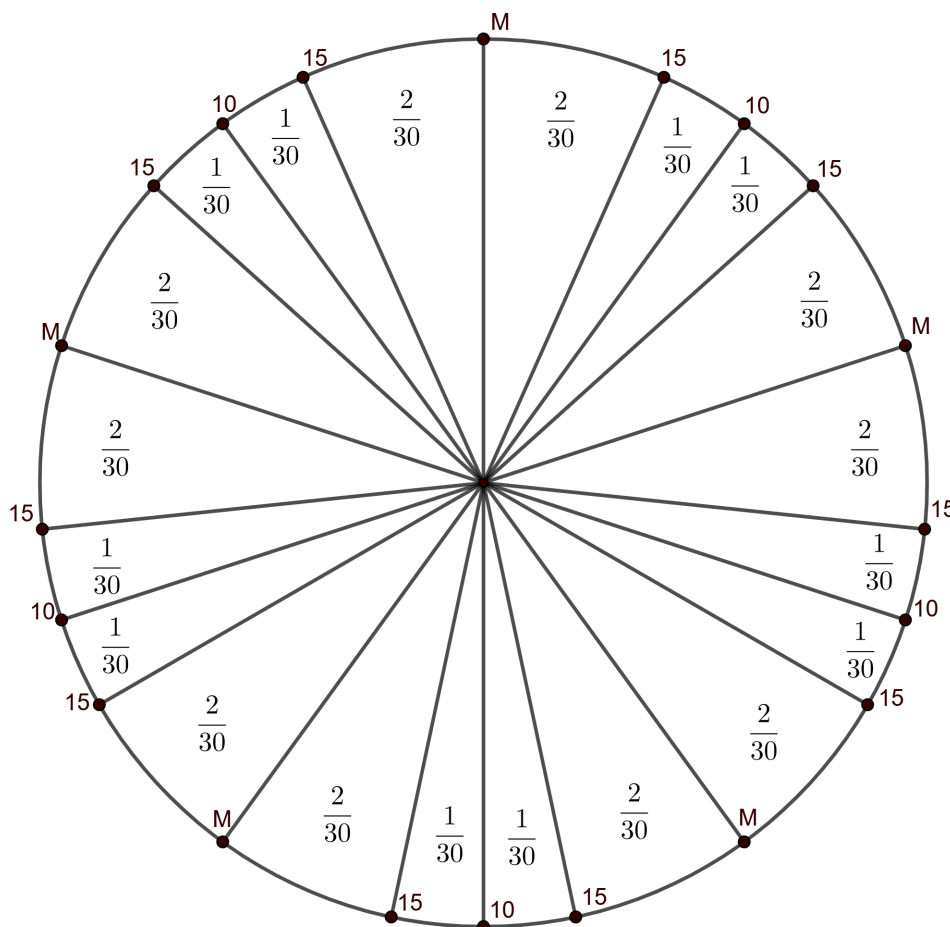
E

KATEGÓRIA

9-12.
osztályosok

E1. Kacsamama születésnapjára Kacsanna családi összejövetelt szervezett, melyre egy henger alakú tortát süített. Eredetileg 15 vendégre számított Kacsanna, ezért ennyi egyenlő körcikkre osztotta a torta tetejét, bejelölve, hogy hol kell majd felválni. Kacsanna öccse, Kacsattila az asztalon maradt torta tetejét azonban szórakozásból 10 egyenlő körcikkre való felosztással is ellátta úgy, hogy lettek olyan sugarai a torta tetejének, melyet mindketten bejelöltek. Mielőtt megjöttek a vendégek, Kacsaladár felvágta az összes jelölés mentén a tortát, majd berakta a hűtőbe. A tortáról megfeledkeztek, és csak az összejövetel végén jutott eszükbe megenni, amikor már csak hatan voltak jelen. Szét tudják-e osztani az egész tortát 6 egyenlő részre úgy, hogy nem vágathják további részekre a meglévő szeleteket?

Megoldás:



Igen, szét tudják. Az ábrán látható a felszeletelés. M-mel vannak jelölve azok a vágások, amik mindkét felosztásban vannak, valamint 10-zel és 15-tel azok a vágások amik csak a 10 illetve 15 részre vágáshoz tartozó felosztásban szerepelnek. Vegyük észre, hogy 3 szomszédos szelet a 15 részre vágásból ugyanakkora, mint 2 szomszédos szelet a 10 részre vágásból, és ez pont a torta egyötöde, így 5 olyan jelölés is van, ami mindkét felosztásban benne van. Egyszerűség kedvéért tekintsünk a tortára, mint egy körre, és legyen a torta területe 1. Látni fogjuk, hogy minden tortaszelet mérete az $\frac{1}{30}$ többszöröse, így mindig harmincadokban számolunk.

Nézzünk két szomszédos M betűs vágást. Az ezek közötti részt a 15-ös vágások 3 egyenlő részre osztják, és a középső szeletet a 10-es vágás két egyenlő részre osztja. Így a két M-es vágás között összesen két darab $\frac{2}{30}$ méretű szelet van, és két darab $\frac{1}{30}$ méretű. A torta 5 ugyanilyen blokkból áll, így összesen a torta 10 darab $\frac{1}{30}$ méretű és 10 darab $\frac{2}{30}$ méretű részre lett felosztva.

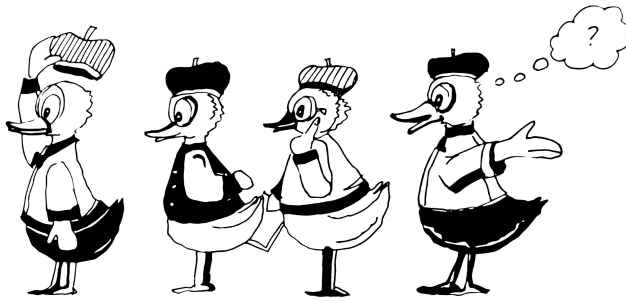
Ha 6 ember akar igazságosan osztozkodni, akkor mindenkinek $\frac{5}{30}$ -ad tortát kell kapnia. Ez pedig tényleg elintézhető: négy ember két darab nagy szeletet ($\frac{2}{30}$ méretű) és egy kis szeletet ($\frac{1}{30}$ méretű) kap, míg a további két embernek három kis szelet és egy nagy szelet jut.



XV. DÜRER
VERSENY

Helyi forduló:
2021. november 12.

MATEMATIKA
MEGOLDÁSOK



E

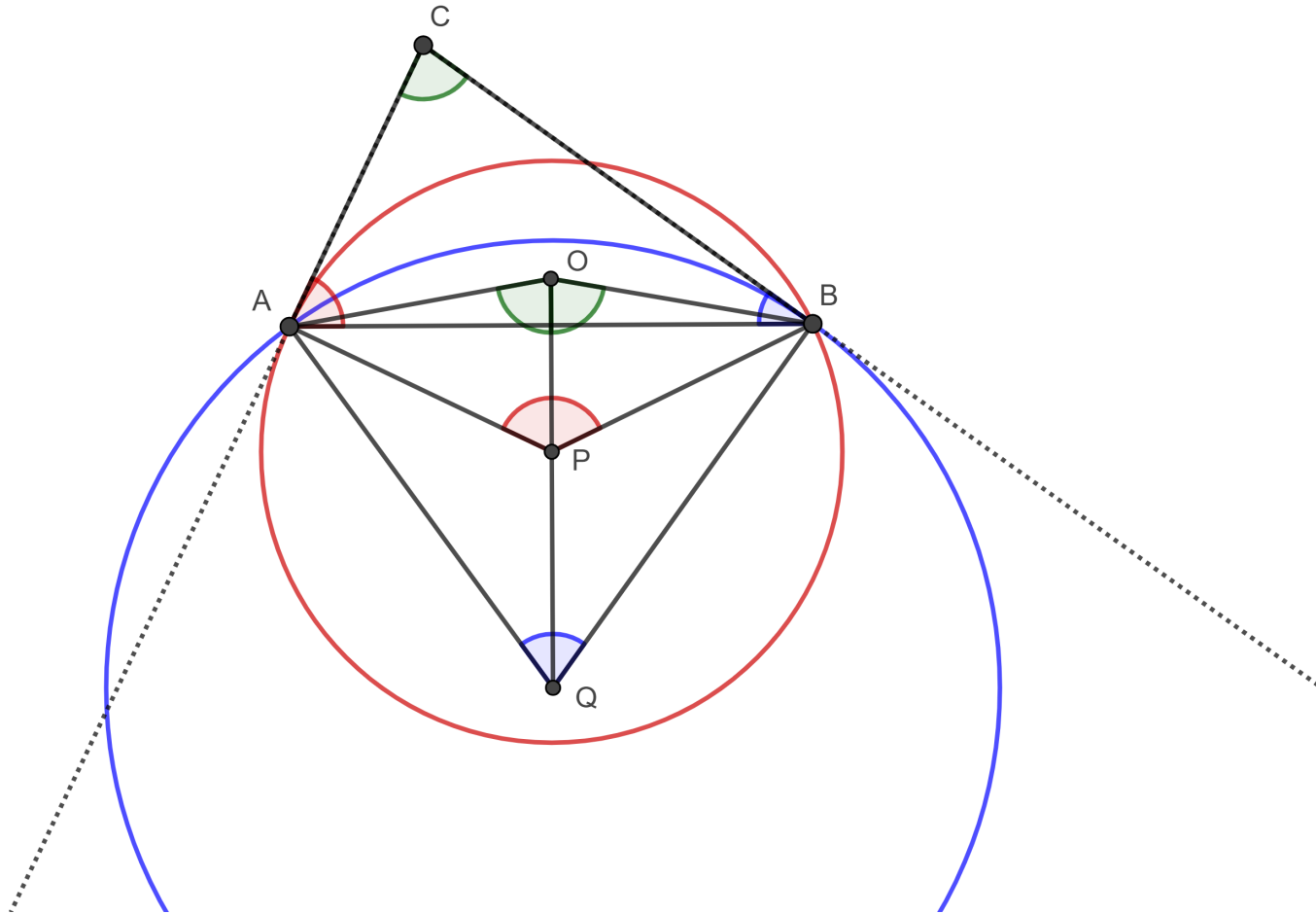
KATEGÓRIA

9-12.
osztályosok

E2. Az ABC hegyesszögű háromszögben a B -n átmenő és az AC egyenest A -ban érintő kör középpontja legyen P , az A -n átmenő és a BC egyenest B -ben érintő kör középpontja legyen Q . Az ABC háromszög köréírt körének sugara legyen R , középpontja O . Lássátok be, hogy $R^2 = OP \cdot OQ$.

Megoldás: Legyen O a köréírt kör középpontja, α, β, γ az ABC háromszög szögei, k_1 és k_2 körök pedig a feladatban definiált BC illetve AC oldalakat érintő körök.

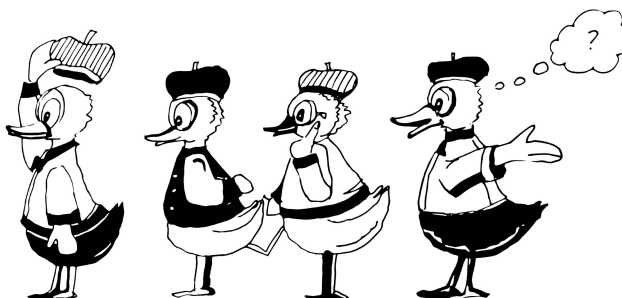
Az O, P, Q pontok mind rajta vannak AB felezőmerőlegesén, speciálisan egy egyenesen vannak.



Azt fogjuk belátni, hogy AQO és PAO háromszögek hasonlóak. Ekkor a következő arányt kapjuk a hasonlóság miatt: $\frac{OQ}{AO} = \frac{AO}{OP}$, és mivel O volt a körülírt kör középpontja, így $AO = R$, vagyis átszorzás után éppen a kívánt egyenlőséget kapjuk. Lássuk be tehát, hogy AQO és PAO hasonlóak. Valójában azt fogjuk igazolni, hogy mindkettő hasonló az ABC háromszöghöz. Ehhez a háromszögek szögeinek egyenlőségét fogjuk ellenőrizni.

Az érintő szárú kerületi szögek tételét alkalmazva a k_2 körre és BAC szögre kapjuk, hogy a BA húrhoz tartozó kerületi szög megegyezik α -val, vagyis kerületi és középponti szögek tétele miatt $BPA = 2\alpha$. Hasonló okoskodást alkalmazva az $ABC = \beta$ szögre és k_1 körre kapjuk, hogy $BQA = 2\beta$. Kerületi és középponti szögek tétele miatt $BOA = 2\gamma$.

Mivel OQ egyenes AB felezőmerőlegese, így felezi az eddig tárgyalt szögeket, azaz $OPA = \alpha$, $OQA = \beta$ és $QOA = \gamma$. Ekkor vegyük észre, hogy PAO háromszögben egy α és egy γ szöget ismerünk, következésképp a harmadik szög β lesz, és hasonlóan az AQO háromszögben egy β és egy γ szöget ismerünk, következésképp a harmadik szög α lesz, és így valóban mindkét háromszög hasonló ABC -hez, és így egymáshoz is. Ezzel az állítást beláttuk.



E3. Parabolha ugrál a síkon az origóból indulva. Egy lépésében ha az (x, y) ponton áll, akkor az $(x + p, y + p^2)$ pontra ugorhat, ahol p egy pozitív valós szám. (A p szám értéke az egyes lépésekben akár eltérő is lehet.)

a) Van-e olyan pontja a első síknegyednek, amibe nem tud eljutni a bolha? (Az első síknegyed azon (x, y) pontokat tartalmazza, melyekre x és y pozitív valós számok.)

b) Legalább hányat kell ugrania az origóból, hogy eljusson a $(100, 1)$ pontba?

Megoldás: a) Nem juthat el a pozitív síknegyed minden pontjába, például az $(1, 2)$ pontba nem tud eljutni. Ugyanis indirekten, ha ide eljutna, akkor minden ugrásához $p \leq 1$ volna. Ám ekkor $p^2 \leq p$, így minden ugrásnál az y -koordináta legfeljebb annyit nőhet, mint az x -koordináta, tehát csak olyan pontokba tud eljutni, amikre $x \geq y$, ám ez az $(1, 2)$ pontra nem teljesül.

b) Tegyük fel, hogy a bolha n lépésben jut el a $(100, 1)$ pontba, rendre a $p_1, p_2, \dots, p_n$ számokat választva, azaz

$$\sum_{i=1}^n p_i = 100 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n p_i^2 = 1.$$

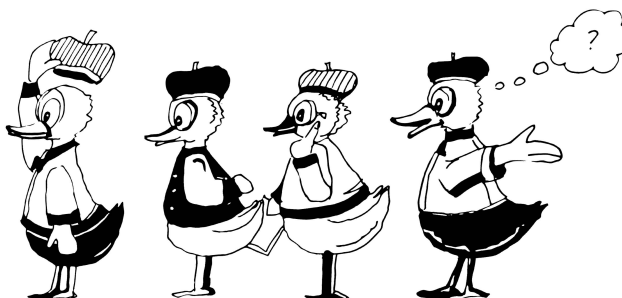
Felhasználjuk a számtani-négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget a következő alakban:

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i^2}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} \right)^2.$$

Így kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^2}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} \right)^2 = \frac{10000}{n^2},$$

azaz $n \geq 10000$. Ezt el is érhetjük: ha $n = 10000$ és $p_i = \frac{1}{100}$ minden n -re, akkor a p_i -k összege nyilván 100, a négyzetösszegük pedig $10000 \cdot \frac{1}{10000} = 1$. Tehát legalább 10000 ugrás kell a bolhának, hogy a $(100, 1)$ pontba jusson.



E4. Az $1, 2, 3, \dots, 100$ számokat legkevesebb hány csoportba lehet felosztani úgy, hogy minden csoporton belül vagy bármely két szám relatív prím, vagy bármely két szám nem relatív prím legyen?
Két szám akkor relatív prím, ha nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk.

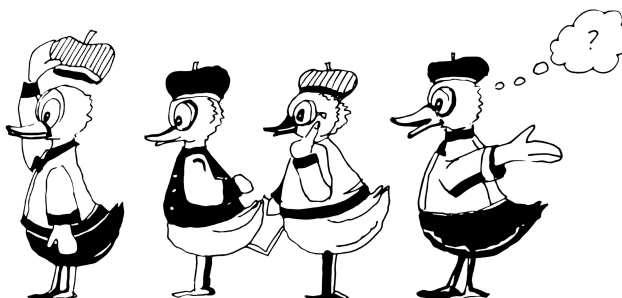
Megoldás: 5 csoportra fel lehet osztani a számokat, mégpedig a következőképpen: az első csoportba kerüljenek a 2-vel osztható számok, a másodikba azok a hárommal osztható számok, amiket nem tettünk bele az első csoportba. A harmadik kupacba rakjuk azokat a számokat, amik 5-tel oszthatóak, de sem az első, sem a második kupacban nem szerepelnek, a negyedikbe azokat, amik 7-tel oszthatóak, de semmelyik előző csoportba sem kerültek, végül az utolsó csoportba kerüljenek az eddig kimaradt számok.

Az első négy csoport jól láthatóan olyan, hogy bármely csoport bármely két tagjára igaz, hogy van 1-nél nagyobb közös osztójuk, mégpedig a 2, a 3, az 5 vagy a 7. Az ötödik kupacról azt fogjuk igazolni, hogy bármely 2 szám benne relatív prím. Valójában ebben a kupacban csak a prímek és az 1 szerepelnek. Vegyünk ugyanis egy n összetett számot, ennek legkisebb prímtényezője a 2, 3, 5, 7 valamelyike kell legyen, hiszen $11^2 > 100$. Vagyis n benne van az első négy kupac valamelyikében. A prímszámok és az 1 pedig valóban olyan kupacot alkotnak, melyben a tagok páronként relatív prímek, így ez egy helyes felosztás.

Most belátjuk, hogy nem lehet kevesebb csoportra bontani a számokat. Indirekten csináljuk, tegyük fel, hogy fel lehet bontani 4 csoportra az első 100 számot a megadott módon. Ekkor a $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ számok közül skatulyaelv szerint valamelyik kettőnek egy csoportban kell szerepelnie. Ekkor azonban ebben a csoportban bármely két számnak kell lennie 1-nél nagyobb közös osztójának. A $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ számoknak csak 2-es szerepel a prímtényező felbontásában, így ebben a csoportban mindenki páros kell, hogy legyen. Maradt tehát 3 másik kupac.

Most hasonló módon a $3, 3^2, 3^3, 3^4$ számokat véve azt találjuk, hogy van olyan csoport, amiben minden szám 3-mal osztható. Így maradt két kupac.

Az $5, 7, 5^2, 7^2, 5 \cdot 7$ számok közül skatulyaelv szerint valamelyik 3-nak egy kupacba kell kerülnie. Végignézve az eseteket a fenti öt számot csak kétféleképpen lehet szétszítani: vagy $5, 5^2$ kerül az egyik kupacba és $7, 7^2, 7 \cdot 5$ a másikba, vagy pedig $5, 5^2, 7 \cdot 5$ az egyikbe és $7, 7^2$ a másikba. Mindkét esetben igaz az, hogy mindkét kupacban bármely két számnak van 1-nél nagyobb közös osztója, ekkor azonban az 1 maga például semmelyik kupacba sem kerülhet, ami ellentmondás. Így valóban szükség van legalább 5 kupacra.

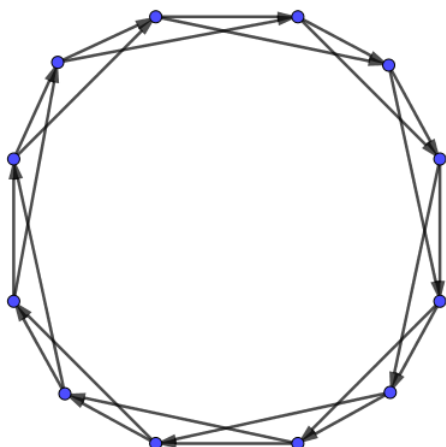


E5. a) Egy 12 fős társaságot egy játékhoz a játékmester két egyenlő csoportra oszt. A játékmester nem árulja el a teljes csapatokat, hanem minden játékos egy cetlin megkapja két játékostársának a nevét, akik közül az egyik a csapattársa, a másik pedig az ellenfél csapatban van, de nem tudja, hogy melyik melyik. Tud-e a játékmester olyan cetliket adni, melyekből a játékosok közösen ki tudják találni, hogy hogyan vannak felosztva a csapatok?

b) A következő alkalommal a játékmester minden cetlire 3 csapattárs és 1 ellenfél nevét írja rá összekeverve. Most úgy akarja megírni a cetliket, hogy a játékosok közösen ne tudják kitalálni a két csapatot. Meg tudja-e ezt tenni?

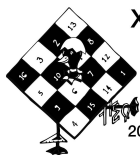
c) Tud-e úgy cetliket írni, hogy ne tudják kitalálni közösen a játékosok a csapatokat, ha most 4 csapattárs és 1 ellenfél neve kerül egy cetlire összekeverve?

Megoldás: a) Igen, el tudja érni, például ha a játékosokat gondolatban egy körön helyezi el, úgy, hogy felváltva vannak a kör mentén az egyik illetve a másik csapatból, és mindenkinek odaadja a tőle jobbra ülő 2 ember nevét. Ez a módszer azért jó, mivel ha két egymás melletti ember ugyanabban a csapatban lenne, akkor a kettejüktől közvetlenül balra lévő játékos két, ugyanabban a csapatban lévő játékos nevét kapta volna, tehát nem lenne lehetséges az, hogy az egyik a csapattársa, a másik pedig nem. Ezek szerint a kör mentén lévő játékosoknak felváltva kell az egyik, illetve a másik csapatban lenniük. (Az ábrán a pontok az emberek, és akkor megy nyíl egy A emberből egy B emberbe, ha A megkapta a cetlijén B nevét.)



b) Igen, el tudja érni. Legyenek a játékosok: $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3$ és C_4 ! Ekkor ha játékmester minden játékosnak odaadja azok nevét, akiknek ugyanaz a számuk, vagy azonos betűjel mellett 1-gyel, vagy 3-mal tér el a számuk (Például C_3 megkapja A_3 -at, B_3 -at, C_2 -t és C_4 -et; A_1 pedig B_1 -et, C_1 -et, A_2 -t és A_4 -et), akkor a két csapat nézhet ki úgy is, hogy az egyik csapatban azok vannak akiknek a számuk 1, vagy 2, a másikban pedig azok, akiknek 3, vagy 4; illetve úgy is, hogy az egyik csapatban vannak, akiknek a számuk 1, vagy 4, a másikban pedig akiknek 2, vagy 3.

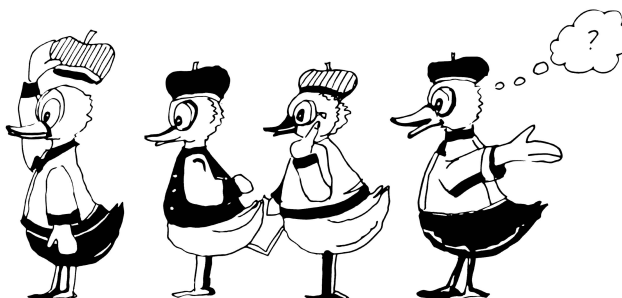
(Az alábbi ábrán a bal oldalon kimenő nyilak a jobb oldalon jönnek vissza, és fordítva, valamint a fent kimenő nyilak lent jönnek vissza, és fordítva.)



XV. DÜRER VERSENY

Helyi forduló:
2021. november 12.

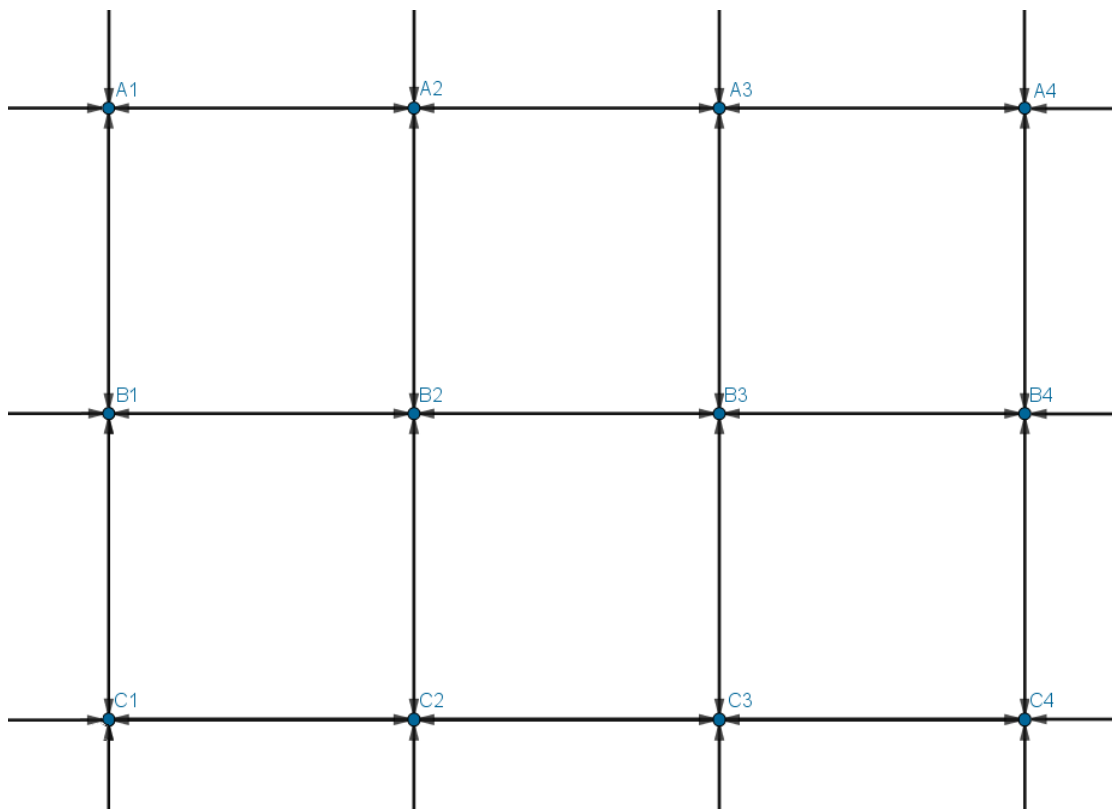
MATEMATIKA MEGOLDÁSOK



E

KATEGÓRIA

9-12.
osztályosok



c) **Nem**, ezt már nem tudja elérni. Azt tudjuk, hogy mindenki egy csapatban van önmagával, tehát ha mindenki felírná a cetlire saját magát is, akkor a cetlijén szereplő így már 6 ember közül 5 a csapattársa lenne, 1 pedig nem. Azaz egy olyan csapattársa lenne mindenkinek, aki nincs rajta a cetlijén. Ha két játékos egy csapatban van, akkor legalább 4 közös név szerepel a felírás után a cetlijükön (mivel 1 játékos van a csapatukból, aki az egyikén nem szerepel, 1, aki a másikon nem. Ha ez a két nem szereplő név különböző, akkor legalább 4 közös név van a két cetlin, ha ugyanaz, akkor legalább 5). Ha két játékos nincs egy csapatban, akkor viszont csak legfeljebb 2 közös név szerepelhet a cetlijeiken, mivel csak egy-egy olyan személy van mindkettőjükén, aki nem a csapattársuk (és az a személy szereplhet a másik cetlijén, mint a másik csapattársa). Tehát ha bármelyik két játékos összehasonlítja a cetlijét, (azok után, hogy ráírták a saját nevüket) akkor a közös nevek számából már meg tudják határozni, hogy együtt vannak-e, így ki tudják találni a játékosok a csapatokat.