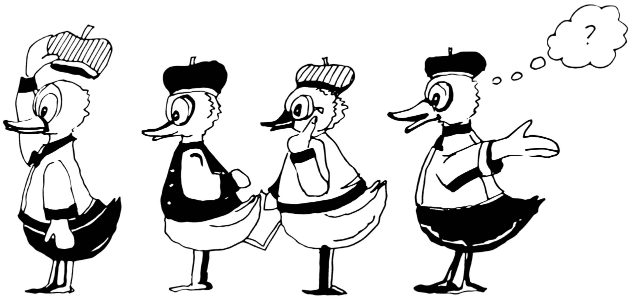
XV. DÜRER VERSENY

Helyi forduló: 2021. november 12.

MATEMATIKA

FELADATSOR



E+

KATEGÓRIA

9-12. osztályosok

---

1. Az $1, 2, 3, \ldots, 100$ számokat legkevesebb hány csoportba lehet felosztani úgy, hogy minden csoporton belül vagy bármely két szám relatív prím, vagy bármely két szám nem relatív prím legyen?
Két szám akkor relatív prím, ha nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk.

2. Határozzátok meg az összes olyan háromszöget, amit szét lehet vágni két egybevágó sokszögre egy vágással. A vágás olyan P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}P_n$ szakaszokból áll, ahol a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok különbözőek, a P_1 és P_n pontok a háromszög kerületére esnek, a többi pont pedig a háromszög belsejében helyezkedik el úgy, hogy a szakaszok a végpontoktól eltekintve diszjunktak.

3. a) Egy 40 fős társaságot egy játékhoz a játékmester négy egyenlő csoportra oszt. A játékmester nem árulja el a teljes csapatokat, hanem minden játékos egy cetlin megkapja két játékostársának a nevét, akik közül pontosan az egyik a csapattársa, de nem tudja, hogy melyikük. Tud-e a játékmester olyan cetliket adni, melyekből a játékosok közösen ki tudják találni, hogy hogyan vannak felosztva a csapatok?

b) A következő alkalommal a játékmester minden cetlire 7 csapattárs és 2 ellenfél nevét írja rá összekeverve. Most úgy akarja megírni a cetliket, hogy a játékosok közösen ne tudják kitalálni a csapatokat. Meg tudja-e ezt tenni?

c) Tud-e úgy cetliket írni, hogy ne tudják kitalálni közösen a játékosok a csapatokat, ha most 6 csapattárs és 2 ellenfél neve kerül egy cetlire összekeverve?

4. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalának F_A, CA oldalának F_B a felezőpontja. Legyenek az F_A középpontú A-n átmenő kör és az F_B középpontú B-n átmenő kör metszéspontjai E és F. Igazoljátok, hogy ha a CE szakasz felezőpontja N, és a CF szakasz felezőpontja M, akkor az M középpontú E-n áthaladó kör és az N középpontú F-en áthaladó kör metszéspontjai illeszkednek az AB egyenesre.

5. Legyenek $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ valós számok, melyekre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{2k+1} = 0$$

minden $0 \leq k < n$ egészre. Mutassátok meg, hogy ekkor $a_i = -a_{n+1-i}$ minden $1 \leq i \leq n$-re.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma. Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XV. Dürer Verseny szervezői