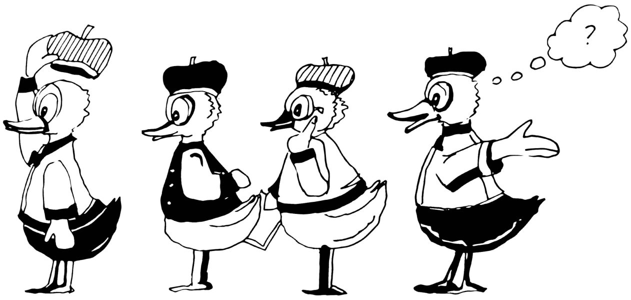
XV. DÜRER VERSENY

Helyi forduló:
2021. november 12.

MATEMATIKA
MEGOLDÁSOK



E+
KATEGÓRIA

**9-12.
osztályosok**

E+1. Az $1, 2, 3, \ldots, 100$ számokat legkevesebb hány csoportba lehet felosztani úgy, hogy minden csoporton belül vagy bármely két szám relatív prím, vagy bármely két szám nem relatív prím legyen?
Két szám akkor relatív prím, ha nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk.

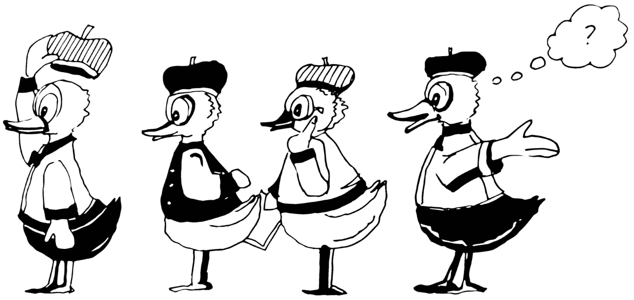
Megoldás: 5 csoportra fel lehet osztani a számokat, mégpedig a következőképpen: az első csoportba kerüljenek a 2-vel osztható számok, a másodikba azok a hárommal osztható számok, amiket nem tettünk bele az első csoportba. A harmadik kupacba rakjuk azokat a számokat, amik 5-tel oszthatóak, de sem az első, sem a második kupacban nem szerepelnek, a negyedikbe azokat, amik 7-tel oszthatóak, de semmelyik előző csoportba sem kerültek, végül az utolsó csoportba kerüljenek az eddig kimaradt számok.

Az első négy csoport jól láthatóan olyan, hogy bármely csoport bármely két tagjára igaz, hogy van 1-nél nagyobb közös osztójuk, mégpedig a 2, a 3, az 5 vagy a 7. Az ötödik kupacról azt fogjuk igazolni, hogy bármely 2 szám benne relatív prím. Valójában ebben a kupacban csak a prímek és az 1 szerepelnek. Vegyünk ugyanis egy n összetett számot, ennek legkisebb prímtényezője a $2, 3, 5, 7$ valamelyike kell legyen, hiszen $11^2 > 100$. Vagyis n benne van az első négy kupac valamelyikében. A prímszámok és az 1 pedig valóban olyan kupacot alkotnak, melyben a tagok páronként relatív prímek, így ez egy helyes felosztás.

Most belátjuk, hogy nem lehet kevesebb csoportra bontani a számokat. Indirekten csináljuk, tegyük fel, hogy fel lehet bontani 4 csoportra az első 100 számot a megadott módon. Ekkor a $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ számok közül skatulyaelv szerint valamelyik kettőnek egy csoportban kell szerepelnie. Ekkor azonban ebben a csoportban bármely két számnak kell lennie 1-nél nagyobb közös osztójának. A $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ számoknak csak 2-es szerepel a prímtényezős felbontásában, így ebben a csoportban mindenki páros kell, hogy legyen. Maradt tehát 3 másik kupac.

Most hasonló módon a $3, 3^2, 3^3, 3^4$ számokat véve azt találjuk, hogy van olyan csoport, amiben minden szám 3-mal osztható. Így maradt két kupac.

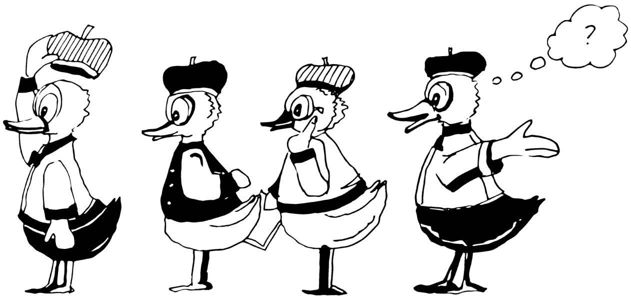
Az $5, 7, 5^2, 7^2, 5 \cdot 7$ számok közül skatulyaelv szerint valamelyik 3-nak egy kupacba kell kerülnie. Végignézve az eseteket a fenti öt számot csak kétféleképpen lehet szétosztani: vagy $5, 5^2$ kerül az egyik kupacba és $7, 7^2, 7 \cdot 5$ a másikba, vagy pedig $5, 5^2, 7 \cdot 5$ az egyikbe és $7, 7^2$ a másikba. Mindkét esetben igaz az, hogy mindkét kupacban bármely két számnak van 1-nél nagyobb közös osztója, ekkor azonban az 1 maga például semmelyik kupacba sem kerülhet, ami ellentmondás. Így valóban szükség van legalább 5 kupacra.



E+2. Határozzátok meg az összes olyan háromszöget, amit szét lehet vágni két egybevágó sokszögre egy vágással. A vágás olyan P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}P_n$ szakaszokból áll, ahol a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok különbözőek, a P_1 és P_n pontok a háromszög kerületére esnek, a többi pont pedig a háromszög belsejében helyezkedik el úgy, hogy a szakaszok a végpontoktól eltekintve diszjunktak.

Megoldás: Ha ABC egyenlőszárú, akkor az alaphoz tartozó magasság két egybevágó derékszögű háromszögre bontja a háromszöget.

Ha ABC nem egyenlőszárú, akkor nincs ilyen vágás. Tegyük fel indirekt módon, hogy van ilyen vágás. Ha P_1 és P_n közül egyik sem egyezik meg a háromszög egyik csúcsával sem, akkor az egyik kapott sokszög $n+1$ oldalú a másik pedig $n+2$ oldalú, ellentmondás. Ezért feltehetjük, hogy $P_1 = A$. A két sokszögnek a kerülete megegyezik és az AP_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}P_n$ szakaszok mindkettőnek az oldalai, ezért $AB + BP_n = AC + CP_n$. Sőt, még az is igaz az egybevágóság miatt, hogy a két sokszög oldalainak hosszai multiplicitással számolva (azaz azt is számoljuk, hogy milyen hosszúságú oldalból hány darab van) megegyeznek. A két sokszögnek $n-1$ oldala egybeesik, így ez a megállapítás adja, hogy $\{AB, BP_n\} = \{AC, CP_n\}$. Ám feltettük, hogy nem egyenlőszárú a háromszög, tehát $AB \neq AC$, így $AB = CP_n$ és $AC = BP_n$. Ekkor $AB + AC = BP_n + CP_n = BC$ ami ellentmond a háromszög-egyenlőtlenségnek. Tehát csak az egyenlőszárú háromszögek esetén van megfelelő vágás.



E+3. **a)** Egy 40 fős társaságot egy játékhoz a játékmester négy egyenlő csoportra oszt. A játékmester nem árulja el a teljes csapatokat, hanem minden játékos egy cetlin megkapja két játékostársának a nevét, akik közül pontosan az egyik a csapattársa, de nem tudja, hogy melyikük. Tud-e a játékmester olyan cetliket adni, melyekből a játékosok közösen ki tudják találni, hogy hogyan vannak felosztva a csapatok?

b) A következő alkalommal a játékmester minden cetlire 7 csapattárs és 2 ellenfél nevét írja rá összekeverve. Most úgy akarja megírni a cetliket, hogy a játékosok közösen ne tudják kitalálni a csapatokat. Meg tudja-e ezt tenni?

c) Tud-e úgy cetliket írni, hogy ne tudják kitalálni közösen a játékosok a csapatokat, ha most 6 csapattárs és 2 ellenfél neve kerül egy cetlire összekeverve?

Megoldás: a) Igen, el tudja érni. A játékmester gondolatban ültesse le a 4 csoportot két 20 fős kör alakú asztal köré, az első asztalnál az első két csoport tagjai üljenek felváltva, a második asztalnál a további két csoport tagjai legyenek felváltva. A játékmester mindenkinek a cetlijére az asztalánál a jobboldali szomszédjának és másodszomszédjának írja a nevét. A valós csoportosztásra világos, hogy tényleg mindenkinek a cetlijére egy csoporttársa és egy másik csoportban lévő ember került. Vegyünk egy tetszőleges csoportokra osztást amire ezek a cetlik stimmelnek. Ha van két ember az egyik asztalnál, akik egy csoportban vannak és egymás mellett ülnek, akkor a tőlük balra ülő játékosnak a két cetlijén lévő ember egy csoportban lenne, ami nem lehet. Tehát senki nincs egy csoportban a jobb oldali szomszédjával, azaz mindenkinek egy csoportban kell lennie a tőle kettővel jobbra ülő játékossal. Ebből viszont már következik, hogy egy csoport tényleg csak olyan lehet, hogy egy asztalnál minden második ember, így tényleg nem lehetnek ezekkel a cetlikkel mások a csoportok, azaz ki tudják találni a játékosok a csoportokat.

Nem. Írja rá mindenki a saját cetlijére még a saját nevét is, így 8 olyan ember lesz a cetlin aki a saját csoportjában van és 2 aki nem. Ha két játékos egy csoportban van, akkor legalább 6 ember egyezik a cetlijükön, mert mindkettőjüknek csak két csoporttársa nincs a cetlijén, így összesen legfeljebb 4 csoporttársuk van aki nincs valamelyikük cetlijén. Míg ha két játékos külön csoportban van, akkor legfeljebb 4 olyan ember lehet aki mindkettejük cetlijén szerepel, mivel ha valaki szerepel mindkettőn akkor legalább az egyiküknek nem a csapattársa, és összesen 4 ilyen ember van a két cetlin. Tehát bármely két ember a cetlijük összehasonlításával egyértelműen meg tudja határozni, hogy együtt vannak-e, így világos, hogy a játékosok meg tudják állapítani a csapatokat.

Igen. Osszuk az embereket 8 darab 5 fős csapatba, $A_1, A_2, \ldots, A_8$ úgy, hogy a valódi csoportok az A_{2i-1} és A_{2i} csapatok összessége $1 \leq i \leq 4$ esetén. Minden i esetén minden ember az A_i csapatból kapja meg a cetlijén az összes többi vele egy csapatban lévő embert, továbbá két embert az A_{i+1} csapatból és kettőt az A_{i-1} csapatból (az indexek modulo 8 értendőek). Világos, hogy az igazi csoportokra osztás szerint tényleg mindenki 6 csapattársat és 2 ellenfelet kapott, ám ha a csoportok az A_{2i} és A_{2i+1} csapatok összessége lenne $1 \leq i \leq 4$ esetén, akkor szintén megfelelő ez a cetli osztás, így a játékosok nem tudják biztosan, hogy mik a valódi csoportok.

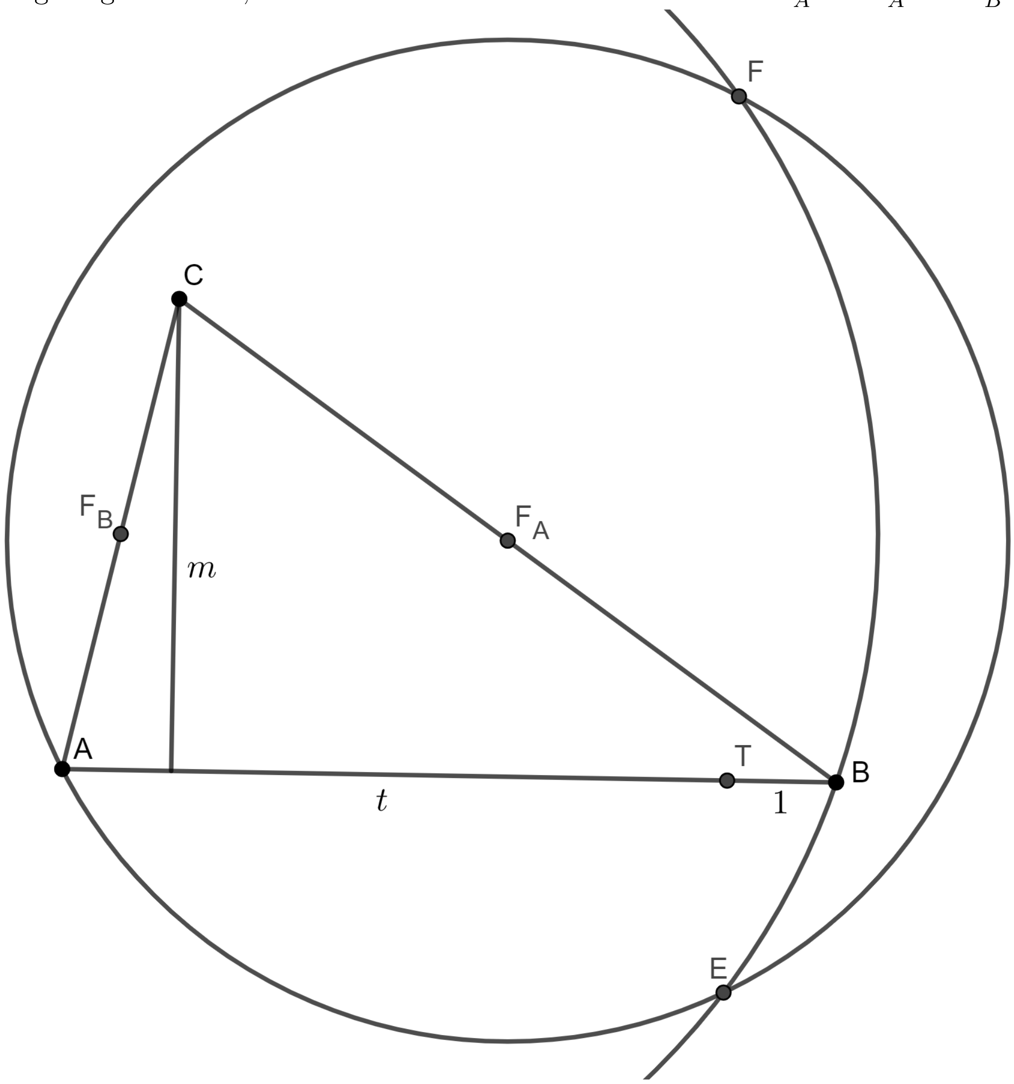
E+4. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalának F_A, CA oldalának F_B a felezőpontja. Legyenek az F_A középpontú A-n átmenő kör és az F_B középpontú B-n átmenő kör metszéspontjai E és F. Igazoljátok, hogy ha a CE szakasz felezőpontja N, és a CF szakasz felezőpontja M, akkor az M középpontú E-n áthaladó kör és az N középpontú F-en áthaladó kör metszéspontjai illeszkednek az AB egyenesre.

1. Megoldás: Először azt látjuk be, hogy az FE egyenes merőleges AB-re és illeszkedik rá a C pont AB felezőmerőlegesére vett tükörképe.

Az F_AF_B szakasz középvonal az ABC háromszögben, így párhuzamos AB-vel. Mivel E és F egymás tükörképei az F_AF_B egyenesre, így az FE merőleges erre az egyenesre, tahát az AB-re is.

Nevezzük az F_A középpontú A-n átmenő kört k_A-nak, az F_B középpontú B-n átmenő kört k_B-nek. Tudjuk, hogy az FE egyenes a k_A és k_B körök hatványvonala, így elég azt belátni, hogy az ABC háromszögben a C-ből induló magasságvonal talppontjának AB felezőmerőlegesére vett tükörképének, T-nek a hatványa megegyezik mindkettő körre.

Az általánosság megszegése nélkül feltehetjük, hogy BT 1 hosszúságú. Ekkor ha AT t hosszú és a C-beli magasság m hosszú, akkor a következőt szeretnénk belátni: $TF_A^2 - AF_A^2 = TF_B^2 - BF_B^2$.



A súlyvonalak hosszára ismert képlettel a szokásos jelölésekkel élve:

$$AF_A^2 - BF_B^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Pitagorasz-tételt használva:

$$TF_A^2 - TF_B^2 = m^2/4 + (t/2-1)^2 - m^2/4 - (t-1/2)^2 = \frac{3}{4}(1-t^2),$$

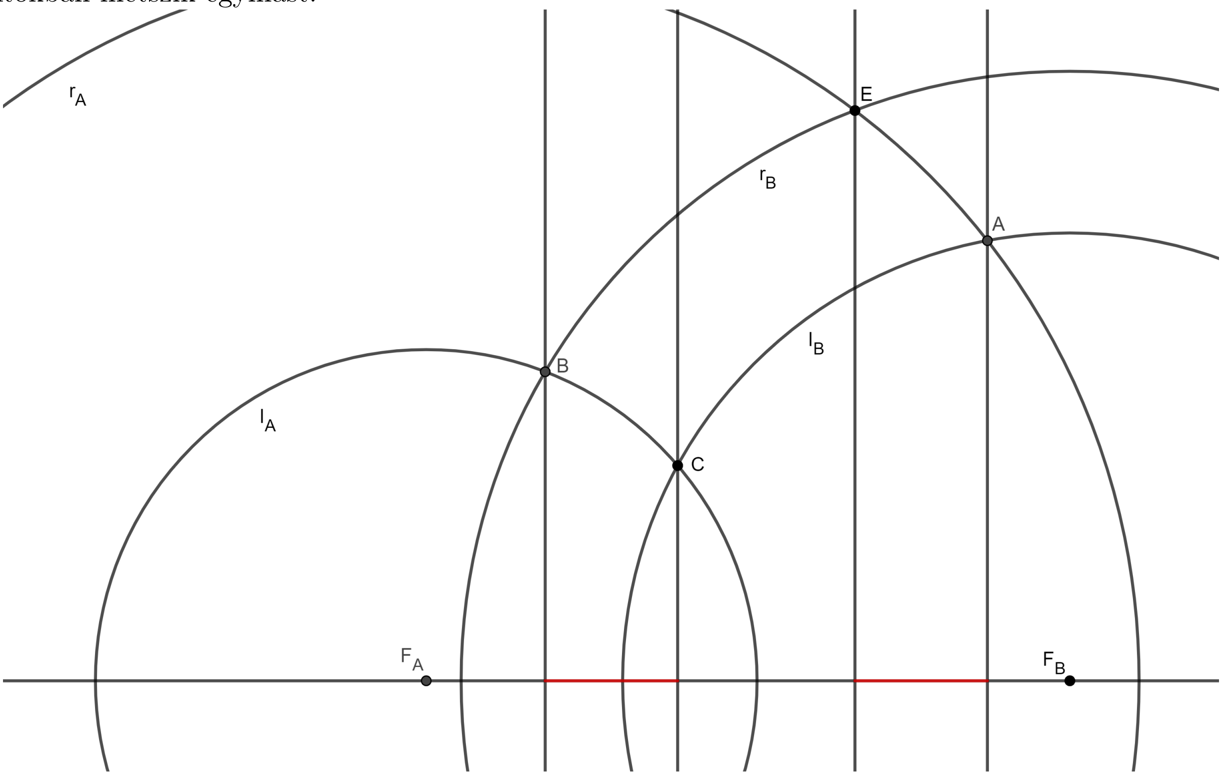
$$\frac{3}{4}(b^2-a^2) = \frac{3}{4}(1+m^2-m^2-t^2).$$

Tehát EF tényleg az AB-re merőleges, C-nek az AB felezőmerőlegesére vett tükörképén áthaladó egyenes.

A feladat szövegének második felében pont ugyanazt csináljuk, mint eddig, csak az ABC háromszög helyett a CEF háromszögre. Tehát a kérdezett metszéspontok rajta lesznek azon az egyenesen ami merőleges EF-re, és illeszkedik rá a C tükörképe az EF felezőmerőlegesére. Tehát párhuzamos AB-vel, és mivel a felezőmerőleges az F_AF_B egyenes, ami az ABC háromszög középvonala, így ez pont az AB egyenes lesz. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

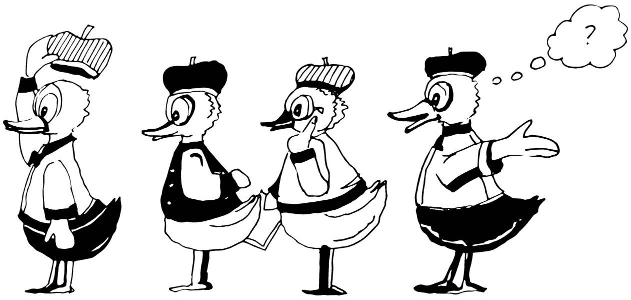
2. Megoldás: Mutatunk egy másik megoldást arra, hogy miért lesz az EF egyenes a C-ből induló magasság tükörképe az AB felezőmerőlegesére. Definiáljuk a k_A és K_B köröket ugyanúgy, mint az előző megoldásban, legyenek a sugaraik rendre r_A és r_B. Továbbá legyen l_A az F_A középpontú C-n áthaladó kör aminek s_A-val jelöljük a sugarát, és l_B az F_B középpontú B-n átmenő kör s_B sugárral. Vegyük észre, hogy l_A és k_B egyik metszéspontja B, l_B és k_A egyik metszéspontja A, l_A és l_B egyik metszéspontja C valamint k_A és k_B egyik metszéspontja E.

Tegyük be az ábrát egy koordináta-rendszerbe úgy, hogy F_A az origó és F_B a $(0,1)$ pont. Ekkor azt kell bizonyítani, hogy a B és a C pont x-koordinátáinak különbsége megegyezik az A és a E pont x-koordinátáinak a különbségével. Az eredeti állításnál kicsit általánosabbat igazolunk, nem fogjuk használni, hogy F_A és F_B felezőpontok, mindössze annyit fogunk használni, hogy a körök milyen pontokban metszik egymást.



Minden P pont esetén x_P jelöli a pont x-koordinátáját. Írjuk fel a körök egyenleteit:

$$l_A: x^2+y^2 = s_A^2, \quad l_B: (x-1)^2+y^2 = s_B^2,$$



$$k_A : x^2 + y^2 = r_A^2, \quad k_B : (x-1)^2 + y^2 = r_B^2.$$

l_A és l_B egyenletét megoldva kapjuk a C pontot, a két egyenletet kivonva egymásból látható, hogy

$$2x_C - 1 = s_A^2 - s_B^2.$$

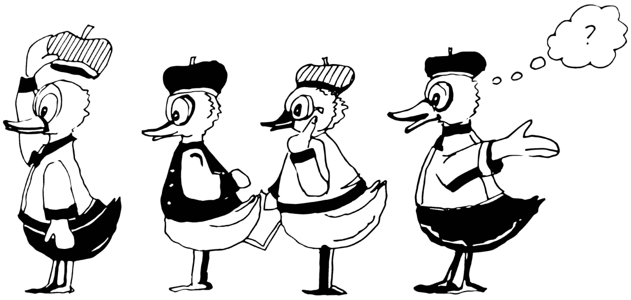
Hasonlóan az l_A és r_B egyenleteiből

$$2x_B - 1 = s_A^2 - r_B^2.$$

Így

$$x_C - x_B = \frac{(s_A^2 - s_B^2 + 1) - (s_A^2 - r_B^2 + 1)}{2} = \frac{r_B^2 - s_B^2}{2}.$$

Látható, hogy ez a távolság nem függ s_A^2-től, így ugyanezt megcsinálva a k_A körre az l_A helyett ugyanezt a képletet kapjuk, ami abban az esetben $x_A - x_E$, és pont ezt akartuk igazolni.



E+5. Legyenek $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ valós számok, melyekre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{2k+1} = 0$$

minden $0 \le k < n$ egészre. Mutassátok meg, hogy ekkor $a_i = -a_{n+1-i}$ minden $1 \le i \le n$-re.

1. Megoldás: Legyen $A = \{|a_i| : 1 \le i \le n\}$ és definiáljuk a következő polinomot minden $\alpha \in A$-ra:

$$P_\alpha = \prod_{\alpha \neq r \in A} (x - r^2)$$

Ekkor $\deg P_\alpha \le n-1$, mert $|A| \le n$. Rögzítsük $\alpha \in A$-t, jelölje b_i a P_α együtthatóit, vagyis $P_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\deg P_\alpha} b_i x^i$. Tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} a_n^{2k+1} = 0$ minden $0 \le k < n$ esetén, így

$$0 = \sum_{k=0}^{\deg P_\alpha} b_k \sum_{i=1}^{n} a_i^{2k+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=0}^{\deg P_\alpha} b_k a_i^{2k} = \sum_{i=1}^{n} a_i P_\alpha(a_i^2)$$

Vegyük észre, hogy $P_\alpha(a_i^2) = 0$ minden a_i-re, amire $|a_i| \neq \alpha$. Ezt kihasználva az előző egyenletet az alábbi alakra tudjuk hozni:

$$0 = P_\alpha(\alpha^2) \sum_{|a_i| = \alpha} a_i$$

A P_α-nak definíció szerint nem gyöke α^2, így $\sum_{|a_i|=\alpha} a_i = 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $\alpha = 0$, vagy az α abszolútértékű a_i számokból ugyanannyi negatív van, mint pozitív. Ezt a gondolatmenetet eljátszhatjuk tetszőleges $\alpha \in A$-ra, melyből adódik az állítás.

2. Megoldás: Jelölje $h_m = \sum_{i=1}^{n} a_i^m$-et. Ismert (szimmetrikus polinomok alaptételéhez hasonló állítás), hogy minden h_m ($m \ge n$) kifejezhető a $h_1, h_2, \ldots, h_n$-ek egy polinomjával. Legyen $m > n$ páratlan, ekkor alkalmas $Q \in \mathbb{R}[h_1, h_2, \ldots h_n]$-re $h_m = Q(h_1, h_2, \ldots h_n)$ (ahol $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots x_n]$ az n változós polinomokat jelöli). Jelölje $M = c\prod_{i=1}^{n} h_i^{t_i}$ a Q polinom egy monomját (c a konstans, míg t_i a kitevők). Mivel h_k foka k, így a páratlan fokú M monomokban kell, hogy szerepeljen h_j-s szorzó, ahol j páratlan. Azonban a feladat feltevése szerint minden $h_j = 0$, így $M = 0$. Mivel h_m foka páratlan és $Q(h_1, h_2 \ldots, h_m)$-ben minden páratlan fokú monom 0, így h_m szintén 0. Tehát $h_m = 0$ minden páratlan m-re. (Vegyük észre, hogy $0 \le k < n$ helyett csupán $0 \le 2k+1 \le n$ feltételt használtuk.)

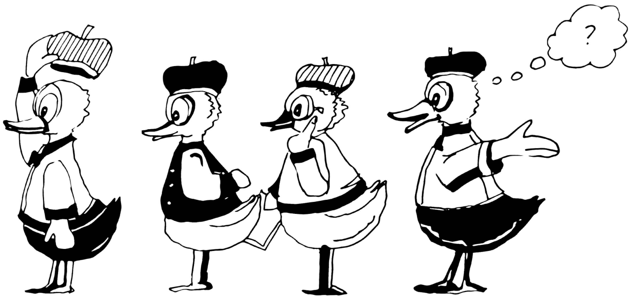
Jelölje α a legnagyobb abszolútértéket az a_i-k között, azaz $\alpha = \max_i |a_i|$. Ha $\alpha = 0$, akkor minden $a_i = 0$ és a feladat állítása nyilván teljesül. Tehát feltehetjük, hogy $\alpha > 0$. Mivel $h_m = 0$ tetszőleges nagy páratlan m-re, így $\lim_{m\to\infty} \frac{h_m}{\alpha^m} = 0$, hiszen minden tag 0 (A megoldás során a limesz mindig csak a páratlan m-eken fut végig). Azonban ha beírjuk h_m definícióját:

$$0 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\alpha^m} \sum_{i=1}^{n} a_i^m = \sum_{i=1}^{n} \lim_{m\to\infty} \frac{a_i^m}{\alpha^m}$$

Vegyük észre, hogy $\lim_{m\to\infty} \frac{a_i^m}{\alpha^m} = 0$, ha $|a_i| \neq \alpha$, mert ekkor $|a_i| < \alpha$. Továbbá $\lim_{m\to\infty} \frac{a_i^m}{\alpha^m} = \operatorname{sgn}(a_i)$, ha $\alpha = |a_i|$, ahol sgn az előjel függvény. Legyen s azon pozitív a_i-k száma, melyek abszolút értéke α. Hasonlóan h a negatív a_i-k száma α abszolút értékkel. Tehát az eddigiek alapján

$$0 = \lim_{m\to\infty} \frac{h_m}{\alpha^m} = s - h.$$

Tehát $s = h$, vagyis az első s és utolsó s darab a_i valóban egymás ellentetjei. Ha ezeket az a_i-ket elhagyjuk, akkor továbbra is teljesül a feladat feltétele, így alkalmazhatunk indukciót. Ezzel beláttuk a feladat állítást.



3. Megoldás: Tekintsük azt az $n\times n$-es M mátrixot, aminek a sorait 0-tól $n-1$-ig számozzuk, és a k-adik sora $(a_1^{2k}, a_2^{2k}, ..., a_n^{2k})$. Ezt a mátrixot szorozzuk meg az $(a_1, a_2, ..., a_n)$ vektorral. Az eredményként kapott vektor kordinátái sorra $a_1+a_2+...+a_n$ és $a_1^3+a_2^3+...+a_n^3$ és így tovább $a_1^{2n-1}+a_2^{2n-1}+...+a_n^{2n-1}$-ig. A feladat feltételei szerint ezek az értékek mind 0-k. Feltehetjük, hogy az $(a_1, a_2, ..., a_k)$ vektor nem volt konstans 0, különben triviálisan teljesül az állítás. Tehát M mátrix megszorozható egy nem 0 vektorral úgy, hogy a 0 vektort kapjuk (éppen ezt tettük), vagyis M sorai lineárisan összefüggőek. Tehát létezik olyan $0 < m \leq n-1$, hogy az m-edik sor megkapható a $0., 1., ..., m-1$-edik sorok lineáris kombinációjaként. Ezután teljes indukcióval bizonyítjuk hogy minden $0 \leq k$ egészre $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^{2k+1} = 0$. A feladat feltétele szerint az indukciós feltevés teljesül $0 \leq k < n$-re. Tegyük föl, hogy $r \geq n$-re már tudjuk, hogy minden $0 \leq k < r$ esetén $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^{2k+1} = 0$. Ekkor vesszük az $(a_1^{2(r-m)+1}, a_2^{2(r-m)+1}, ..., a_n^{2(r-m)+1})$ vektort. Ezt megszorozva a mátrix nulladik, első, ..., $(m-1)$-edik sorával rendre a $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^{2(r-m)+1}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^{2(r-m+1)+1}$,... és $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^{2(r-1)+1}$ értékeket kapjuk, és az indukciós feltevés szerint ezek mindegyike 0. Mivel az M mátrix m-edik sora megkapható a korábbiak lineáris kombinációjaként, ezért az $(a_1^{2(r-m)+1}, a_2^{2(r-m)+1}, ..., a_n^{2(r-m)+1})$ vektor szorzata az m-edik sorral a korábbi szorzatok lineáris kombinációja, vagyis ez is 0. Tehát $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^{2r+1} = 0$, ezzel az indukciós lépést beláttuk. Innen alkalmazható ugyanaz a gondolatmenet, mint a második megoldás végén.