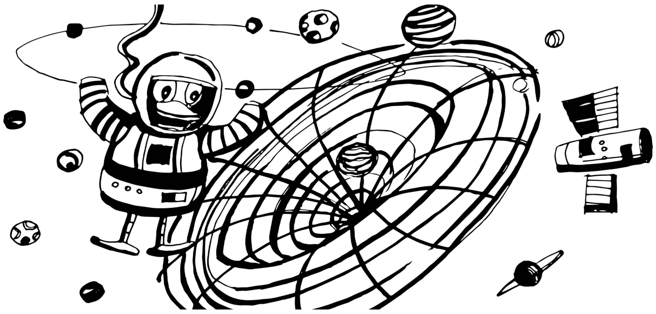
XV. DÜRER VERSENY

Helyi forduló: 2021. november 12.

FIZIKA

MEGOLDÁSOK



F

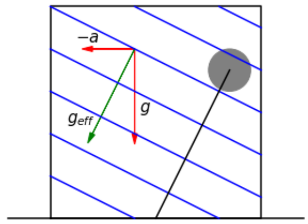
KATEGÓRIA

10-12. osztályosok

1. Feladat

(a)

A gyorsulás nagyságától függően megváltozik az üvegben a víz nyomáseloszlása. Az állandó nyomású felületek az ábrán kékkel jelölt síkok, amelyek merőlegesek a $\boldsymbol{g}_{eff}$-el jelölt effektív gravitációs gyorsulás vektorára. A $\boldsymbol{g}_{eff}$ két másik vektor eredőjeként adódik. Egyik a függőlegesen lefelé mutató $\boldsymbol{g}$ gravitációs gyorsulás vektora. A másik az üveg talajhoz képesti $\boldsymbol{a}$ gyorsulásával ellentétes $-\boldsymbol{a}$ tehetetlenségi gyorsulást leíró vektor. A fonal $\boldsymbol{g}_{eff}$-el párhuzamosan áll be, azaz a test a vízszintes gyorsulással azonos irányba, jobbra tér ki.

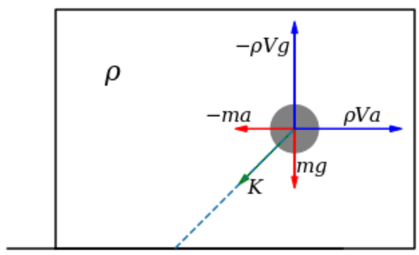


1. ábra. A kialakult nyomáseloszlás.

(b)

$-\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{g}$ merőlegesek, ezért $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{g}|$ esetén fog 45°-os szöget bezárni $\boldsymbol{g}_{eff}$ a függőlegessel. Tehát $a = g$-vel kell jobbra gyorsítani az üveget, hogy a test 45°-ban térjen ki.

Ugyanezt statikai megfontolások alapján is megkaphatjuk!

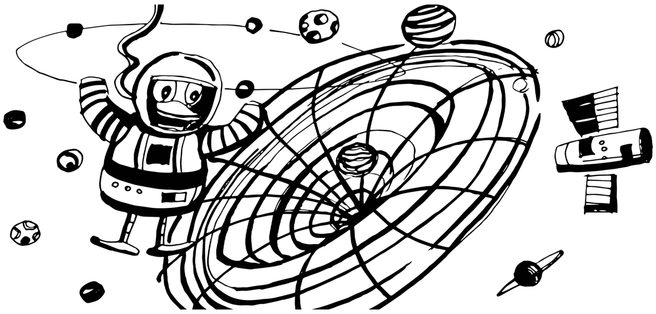


2. ábra. A testre ható erők a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben.

A testre ható erők: $\boldsymbol{K}$ kötélerő (45°-ot zár be függőlegessel), $m\boldsymbol{g}$ nehézségi erő, $-\rho V\boldsymbol{g}$ felhajtóerő, $-m\boldsymbol{a}$ tehetetlenségi erő, és $\rho V\boldsymbol{a}$ felhajtóerő jellegű "jobbrahajtóerő". ρ a víz sűrűsége és V a test térfogata. Az állandósult állapot feltétele, hogy gyorsuló vonatkoztatási rendszerben az eredő erő vízszintes és függőleges komponense is nulla:

$$\rho V a - \frac{K}{\sqrt{2}} - ma = 0, \quad mg + \frac{K}{\sqrt{2}} - \rho V g = 0.$$

A két egyenlet összegéből adódik, hogy $(m - \rho V)(g - a) = 0$. A első zárójelben szereplő kifejezés értéke nem nulla, oszthatunk vele, így $a = g$ eredményt kapjuk, mely a korábbival megegyezik.



Megjegyzés: Ha levegő is van az üvegben, akkor a vízfelszín és a levegő határvonala egy izobár felület, ahogy az 1. ábrán látható. Mivel a feladat szövege szerint az üvegben csak kis mennyiségben van levegő, ez a fonal feszességén nem változtat, így a test helyzetén sem.

2. Feladat

(a)

A lövedék, akkor fog elválni a deszkától, amikor a deszka szöggyorsulása előjelet vált. Ez a deszka függőleges helyzetében következik be, ugyanis ekkor az M tömegű nehezék már a bal oldalon van, így a forgatónyomatéka csökkenti a szögsebességet.

(b)

Az oszlop magasságát jelölje $L = 2\,\mathrm{m}$. A kiinduló helyzetben rendszer potenciális energiája a talajhoz képest $(m + M)gL$. A lövedék kirepülésének pillanatában a rendszer potenciális és mozgási energiájának összege egyenlő a kezdeti potenciális energiával:

$$mg\frac{3L}{2} + Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}(m + M)v^2 = (m + M)gL, \tag{1}$$

ahol v a testek sebessége, a kilövés pillanatában.
Átrendezve az egyenletet:

$$v^2 = \frac{M - m}{M + m}gL\,.$$

Innentől az m tömegű test mozgása a talajig egy vízszintes hajításként írható le. Mivel $3L/2$ magasról indul a test:

$$\frac{3}{2}L = \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad \to \quad t = \sqrt{\frac{3L}{g}}$$

ideig esik, ezalatt vízszintes elmozdulása

$$vt = L\sqrt{3 \cdot \frac{1 - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}}}\,. \tag{2}$$

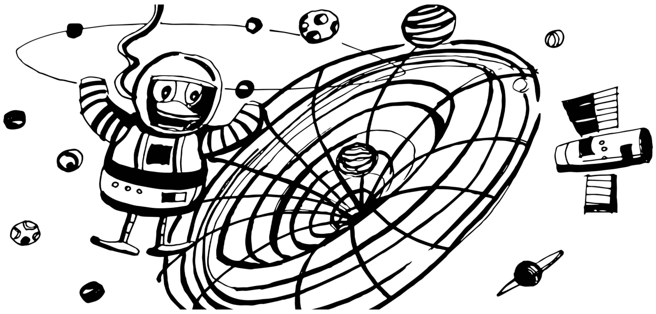
Ide $\frac{m}{M} = \frac{1}{2}$ értéket írva a kérdéses út:

$$\boxed{L = 2\ \mathrm{m}}\,.$$

(c)

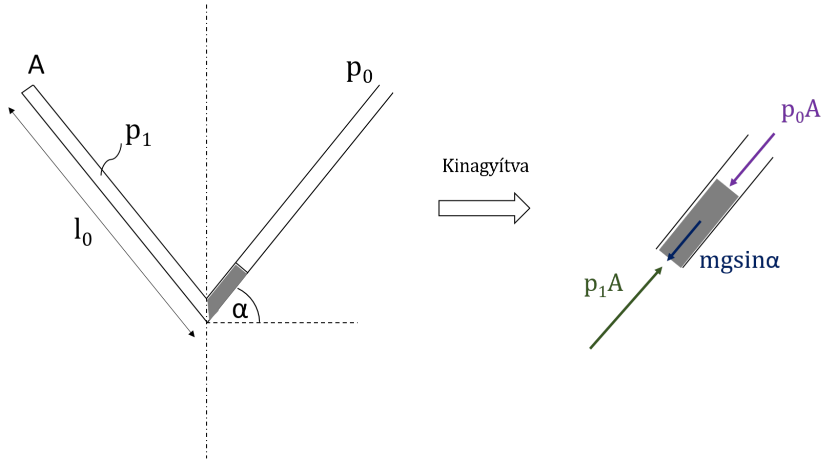
A kérdést megválaszolhatjuk határérték számítással: $\frac{M}{m} \to \infty$ esetén $\frac{m}{M} \to 0$, amit összevetve a (2)-es egyenlettel kapjuk, hogy $\sqrt{3}L$ a lövés távolsága nagy M/m arány esetén.
Ugyanez elegánsabban is megkapható. Nagy M/m arány esetén az energiamegmaradást leíró (1)-es egyenletben elhanyagolható m. Így $m = 0$ -t behelyettesítve kapjuk, hogy $v^2 = gL$, majd $d_{max} = vt = \sqrt{gL}\sqrt{\frac{3L}{g}} = \sqrt{3}L$.
Behelyettesítve:

$$\boxed{d_{max} \approx 3,46\ \mathrm{m}}\,.$$



3. Feladat

I. Nyugalmi helyzet vizsgálata



3. ábra. Nyugalmi állapotban a Hg dugóra ható erők a cső falával párhuzamosan.

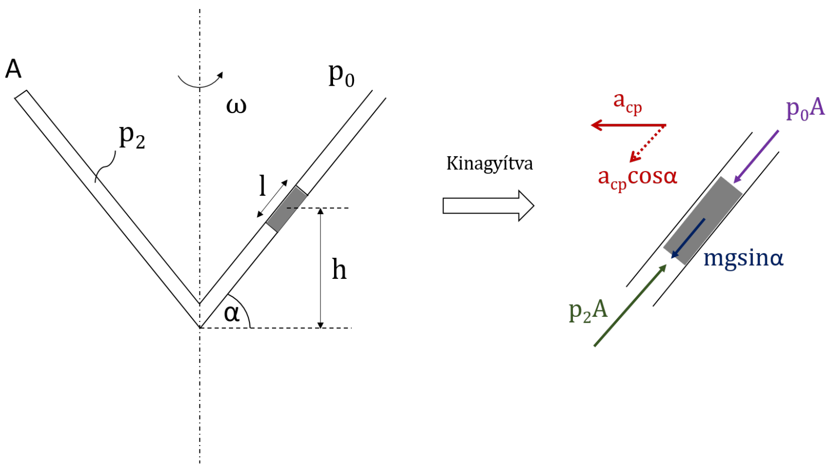
Kiinduló helyzetben a higanydugó egyensúlyban van, írjuk fel a rá ható erők egyensúlyának feltételét a cső falával párhuzamos irányban!
Legyen a cső keresztmetszeti területe A, ekkor:

$$p_0 A + mg \sin\alpha - p_1 A = 0 \, .$$

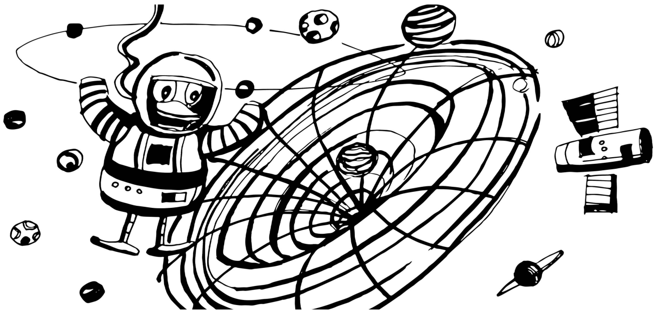
A higanydugó tömegét a megadott paraméterekkel kifejezve, A-val egyszerűsítve, valamint átrendezve:

$$p_1 = p_0 + \rho l g \sin\alpha \, . \tag{3}$$

II. Forgó rendszer vizsgálata



4. ábra. Forgatás során a Hg dugóra ható erők a cső falával párhuzamosan.



1.) Írjuk fel ebben az esetben is a higanydugó cső falával párhuzamos mozgásegyenletét:

$$p_0 A + mg\sin\alpha - p_2 A = m a_{cp}\cos\alpha \ .$$

Mivel az elrendezés szöget zár be a forgástengellyel a higanydugó egyes darabkáinak a_{cp} gyorsulás értéke nem egyezik meg egymással. A továbbiakban egy egyszerű gondolatmenettel belátjuk, hogy a kis részek különböző centripetális gyorsulásának nagysága (az eredő gyorsulás nagyságát tekintve) éppen megegyezik a higanydugó tömegközéppontjában ható centripetális gyorsulás nagyságával!

2.) Gondolatban osszuk fel a higanydugót a forgástengelyre merőleges egyenesekkel azonos hosszúságú kicsiny darabokra! Legyen az eredeti higanydugó tömegközéppontjának forgástengelytől vett távolsága r! Ekkor a felosztás után kapott, forgástengelyhez legközelebb eső darabka attól vett távolsága éppen $r - \frac{l}{2}\cos\alpha$, míg a legtávolabbié $r + \frac{l}{2}\cos\alpha$.
Mivel a cső egyenes, az egyes darabok forgástengelytől vett távolsága a felosztás két végpontja között lineárisan változik, és mivel a cenrtipetális gyorsulás a távolság első hatványával arányos, a centripetális gyorsulás nagysága is lineárisan változik a két végpont között.
Azaz a teljes higany átlagos centripetális gyorsulása éppen a két végpont centripetális gyorsulásának számtani közepe, tehát nagysága:

$$a_{cp} = \frac{r - \frac{l}{2}\cos\alpha + r + \frac{l}{2}\cos\alpha}{2}\,\omega^2 = r\omega^2 \ .$$

3.) Az előzőeket felhasználva:

$$p_0 A + \rho A l g \sin\alpha - p_2 A = \rho A l r \omega^2 \cos\alpha \ ,$$

A-val egyszerűsítve

$$p_0 + \rho l g \sin\alpha - p_2 = \rho l r \omega^2 \cos\alpha \ . \tag{4}$$

III. A gáz vizsgálata

Mivel gáz anyagmennyisége és hőmérséklete a folyamat során állandó marad, felírhatjuk a Boyle-Mariotte törvényt:

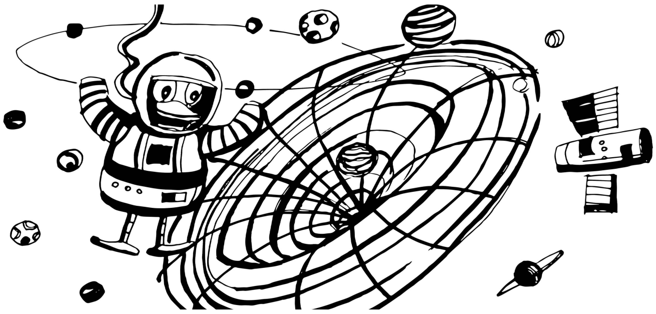
$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \ .$$

Részletezve:

$$p_1 A l_0 = p_2 A\left(l_0 + \frac{h}{\sin\alpha} - \frac{l}{2}\right) \ .$$

Rendezve:

$$p_2 = \frac{l_0}{l_0 + \frac{h}{\sin\alpha} - \frac{l}{2}}\, p_1 = \frac{3}{4}\, p_1 \ . \tag{5}$$



IV. A kérdezett szögsebesség meghatározása
(3),(4),(5) egyenletek alapján $\Rightarrow$

$$p_0 + \rho l g \sin\alpha - \frac{3}{4}\left(p_0 + \rho l g \sin\alpha\right) = \rho l r \omega^2 \cos\alpha \ .$$

Használjuk fel, r felírható $r = \frac{h}{\mathrm{tg}\alpha}$ alakban, ezt beírva ω-ra rendezve a kifejezést:

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_0 + \rho l g \sin\alpha}{\rho l h \cos\alpha}\,\mathrm{tg}\alpha} \ .$$

Behelyettesítve:

$$\boxed{\omega = 12,56\ \frac{1}{\mathrm{s}}} \ .$$

4. Feladat

A töltések között, ható erő $F = kqQ/R^2$, ahol R a töltések távolsága:

$$R^2 = \left(L + \frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(L - \frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3L^2 \ .$$

Az ingán levő testre ható erők eredője nulla, írjuk fel ezt a függőleges és vízszintes komponensekre:

$$\frac{K}{\sqrt{2}} + F\sin\beta - mg = 0, \qquad F\cos\beta - \frac{K}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F(\sin\beta + \cos\beta) = mg,$$

ahol K a testre ható kötélerő, és β a töltéseket összekötő egyenes vízszintessel bezárt szöge.
Az ábra alapján:

$$\tan\beta = \frac{L - L/\sqrt{2}}{L + L/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \ .$$

Addíciós tételt felhasználva:

$$\sin\beta + \cos\beta = \frac{1 + \tan\beta}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{18 - 12\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{24 - 16\sqrt{2}}{18 - 12\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{12 - 8\sqrt{2}}{9 - 6\sqrt{2}}} \ .$$

A gyök alatti kifejezés gyöktelenítése:

$$\frac{12 - 8\sqrt{2}}{9 - 6\sqrt{2}} \cdot \frac{9 + 6\sqrt{2}}{9 + 6\sqrt{2}} = \frac{108 - 96 + 72\sqrt{2} - 72\sqrt{2}}{81 - 72} = \frac{4}{3} \ .$$

Mindent összevetve

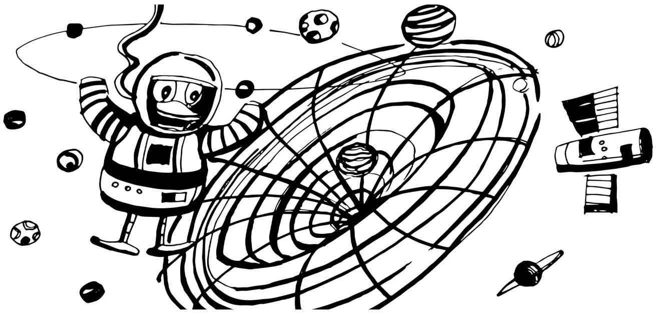
$$\frac{kqQ}{3L^2}\frac{2}{\sqrt{3}} = mg \ ,$$

amiből

$$Q = \frac{mgL^2}{kq}\frac{3\sqrt{3}}{2} \ .$$

Behelyettesítve:

$$\boxed{Q \approx 2,832 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}} \ .$$



5. Feladat

(a)

A becsapódási sebességek arányát egyszerűen, számítás nélkül is megadhatjuk, ehhez gondoljuk végig, hogy pontosan mi is történik az egyes kísérletekben!

Az első kísérlet során a keret nem csúszik meg, tehát az eldőlés folyamata lényegében egy merev test AB tengely körüli 90°-os elfordulásaként írható le. Ez alapján becsapódáskor a C pont sebességvektora függőleges irányú kell legyen, nagyságát a mechanikai energia megmaradásának törvényéből határozhatjuk meg.

A második esetben a felületet súrlódásmentesnek tekintjük, a keret mozgását forogva haladásként értelmezhetjük. Azonban a keretre csak függőleges irányú külső erők hatnak, így vízszintes irányban érvényes a lendületmegmaradás törvénye. Mivel kezdetben a rendszernek nem volt vízszintes irányú lendülete, a becsapódás pillanatában sem lehet (és mivel a keret nem is szakadhat szét), a test egyetlen pontjának sem lesz vízszintes irányú sebességkomponense ekkor. Tehát azt kaptuk, hogy a két kísérlet végállapota is megegyezik a kiinduló helyzeten túl, azaz a mechanikai energiamegmaradás törvényét felírva (hiszen ez a 2. kísérlet során is érvényes) az az eredmény adódik, hogy a C pont becsapódási sebessége megegyezik a két esetben:

$$\boxed{\frac{v_{C1}}{v_{C2}} = 1} \,.$$

Megjegyzés: Az (a) rész számolással is megoldható, a mechanikai energiamegmaradás törvényét és a Steiner-tételt használva.

Az első kísérleben a kezdeti potenciális energiából forgási energia lesz:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\,\theta_{AB}\,\omega_1^2\,, \tag{6}$$

ahol θ_{AB} a keret AB oldalára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, és ω_1 a keret szögsebessége a becsapódás pillanatában.

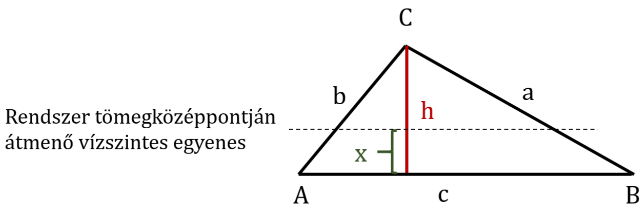
A második kísérletben a potenciális energiából forgási energia és tömegközéppont haladó mozgása révén mozgási energia is lesz:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\,\theta_{TK}\,\omega_2^2 + \frac{1}{2} m v_{TK}^2\,. \tag{7}$$

θ_{TK} a keret tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontra vonatkozatva, ez Steiner-tétel alapján:

$$\theta_{TK} = \theta_{AB} - m x^2\,, \tag{8}$$

ahol m a keret tömege és x a rendszer tömegközéppontjának távolsága a c oldaltól (ld. 5. ábra).



5. ábra. x távolság értelmezése.

A tömegközéppont sebességét kifejezve x-el és a becsapódás pillanatában levő ω_2 szögsebességgel:

$$v_{TK} = x\omega_2 \ . \tag{9}$$

A (8), (9) egyenleteket beírva (7)-be adódik, hogy a második kísérletben:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\,\theta_{AB}\,\omega_2^2 \ . \tag{10}$$

(10) és (6) összevetéséből látható, hogy $\omega_1 = \omega_2$. Mivel a C pont sebességét mindkét kísérlet esetén $v_C = h\omega$ képlettel számolhatjuk (h a háromszög c oldalhoz tartozó magassága), és a két szögsebesség egyenlő, ezért $v_{C1} = v_{C2}$ adódik, mely az előző erdménnyel megegyezik.

(b)

I. Az (a) feladatrész eredményét felhasználva elegendő az egyik esetben kiszámolni a kérdezett sebességet.
Legyen ez az egyszerűbben felírható 1. kísérlet esete, melynek során az elegendően nagy tapadás biztosított!

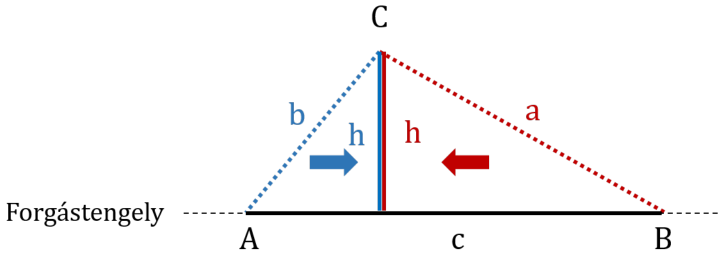
II. Írjuk fel a mechanikai energiamegmaradás törvényét, rudanként kezelve a testet!

$$\sum E_{mech} = konst.$$

1.) Jelölje az egyes rudak tömegét rendre m_a, m_b és m_c, ekkor:

$$(m_a + m_b)g\frac{h}{2} = \frac{1}{2}(\theta_a + \theta_b)\ \omega^2 \ .$$

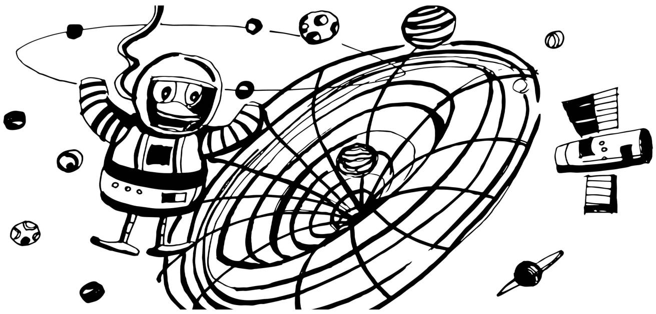
2.) θ_a illetve θ_b értékét a lapítási tétel felhasználásával kaphatjuk meg. E szerint egy test adott tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka nem változik meg, ha a testet a vizsgált tengellyel párhuzamosan összenyomjuk, vagy megnyújtjuk.



6. ábra. A lapítási tétel alkalmazása.

Ez alapján az a illetve b hosszúságú rudakat is összenyomhatjuk egy-egy h hosszúságú, m_a illetve m_b tömegű vékony rúddá (ld. 6. ábra), melyeknek már ismerjük a tehetetlenségi nyomatékát (vége körül forgó vékony rúd):

$$\theta_a = \frac{1}{3}m_a h^2, \quad \theta_b = \frac{1}{3}m_b h^2 \ .$$



3.) Ezeket visszahelyettesítve az energiamegmaradásba:

$$(m_a + m_b)g\frac{h}{2} = \frac{1}{6}(m_a + m_b)h^2\ \omega^2\ .$$

Innen a C pont $v_C = \omega h$ sebessége $v_c = \sqrt{3gh}$. A háromszög területe alapján h kifejezhető az a, b, c paraméterekkel, így:

$$v_c = \sqrt{3g\frac{ab}{c}}\ .$$

Behelyettesítve:

$$\boxed{v_c = 2,7\ \frac{m}{s}}\ .$$

Megjegyzés: Természetesen a 2. kísérlet alapján is meghatározhatjuk a becsapódási sebbességet, ugyanazt a végeredményt kell kapjuk. Oldjuk meg ellenőrzésképpen így is a példát!

1.) Írjuk fel ismét a mechanikai energiamegmaradás törvényét, a keret az elengedést követően forogva haladó mozgást végez:

$$\sum E_{mech} = konst.$$

$$m_a g\frac{h}{2} + m_b g\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\ (m_a + m_b + m_c)\ v_{TK}^2 + \frac{1}{2}\ \theta_{TK}\ \omega^2\ .$$

2.) θ_{TK} felírásakor használjuk fel ismét a lapítási tételt, ezen felül alkalmazzuk a Steiner-tételt, valamint, hogy a tehetetlenségi nyomatékok összegződnek:

$$\theta_{TK} = m_c x^2 + \frac{1}{12}\ (m_a + m_b)\ h^2 + (m_a + m_b)(\frac{h}{2} - x)^2\ ,$$

ahol x a rendszer tömegközéppontjának távolsága a c oldaltól (ld. 5. ábra).

3.) x értékét a tömegekkel, valamint h-val kifejezve:

$$x = \frac{m_a + m_b}{m_a + m_b + m_c}\ \frac{h}{2}\ .$$

Ezeket beírva az energiamegmaradásba:

$$\frac{\omega^2}{2}\left((\frac{m_a + m_b}{m_a + m_b + m_c})^2\ \frac{m_c h^2}{4} + \frac{1}{12}\ (m_a + m_b)\ h^2 + (m_a + m_b)(\frac{h}{2} - \frac{m_a + m_b}{m_a + m_b + m_c}\ \frac{h}{2})^2\right) +$$

$$+ \frac{m_a + m_b + m_c}{2}\ v_{TK}^2 = (m_a + m_b)g\frac{h}{2}\ .$$

4.) Használjuk fel azt a kényszerfeltételt, hogy a becsapódás pillanatában a c oldal függőleges sebessége zérus, ebből:

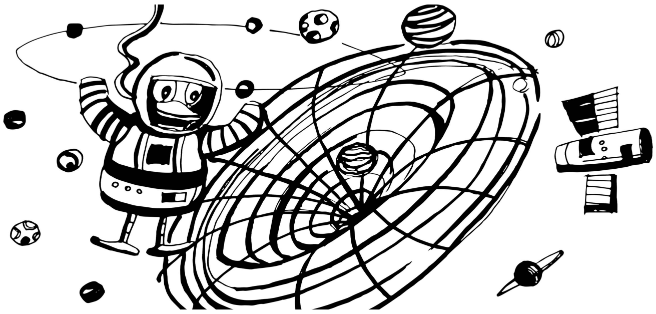
$$v_{TK} = \omega x\ .$$

Ezt beírva a fenti egyenletbe már csak ω az ismeretlen, a tömegek kiesnek:

$$\frac{3g}{h} = \omega^2\ \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\ \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + 2m_a m_b + 2m_a m_c + 2m_b m_c}{(m_a + m_b + m_c)^2}\right) = \omega^2\ ,$$

azaz a szögsebesség:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{h}}\ .$$



5.) A C pont becsapódási sebessége:

$$v_C = v_{TK} + \omega(h - x) = \omega x + \omega(h - x) = \omega h = \sqrt{3gh}\ ,$$

a megadott paraméterekkel:

$$\boxed{v_C = \sqrt{3g\frac{ab}{c}}}\ .$$

Ez pedig a korábban kapott eredménnyel valóban megegyezik.