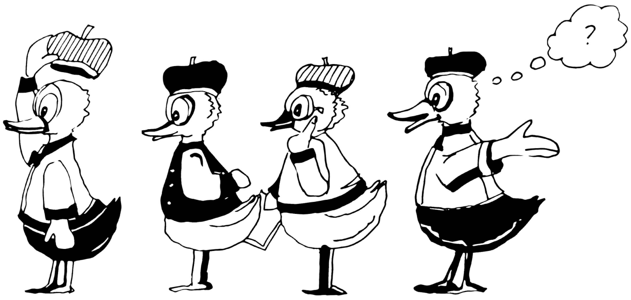
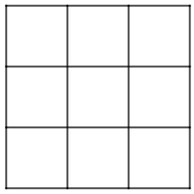


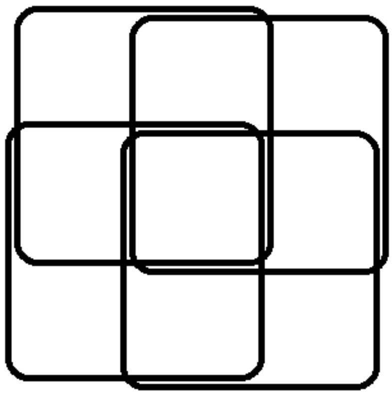
C1. Csongor négyzeteket rajzol a papírjára (két lerajzolt négyzet átfedheti egymást). Néhány négyzet lerajzolása után az alábbi ábra rajzolódik ki. Legkevesebb hány négyzetet kellett Csongornak lerajzolnia ehhez?



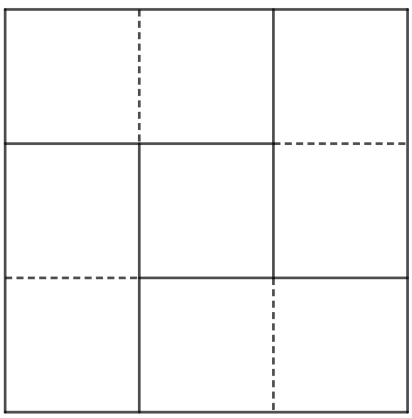
Nagy Kartal feladata

1. Megoldás:

Négy négyzet rajzolásával Csongor elérhette a feladatban szereplő konfigurációt, ha a 4 darab 2×2 méretű négyzetet rajzolta le (lásd ábra).

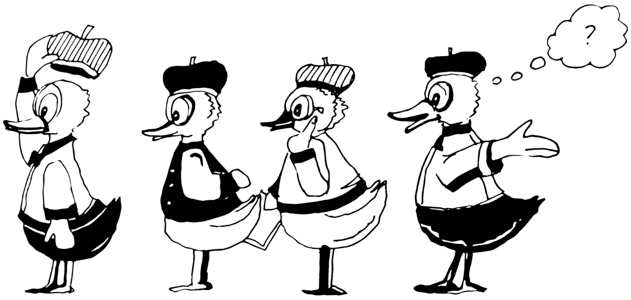


Négynél kevesebb négyzettel ugyanakkor nem lehet megcsinálni, mivel könnyű meggondolni, hogy a szaggatottal jelölt négy szakaszból semelyik kettőt nem lehet egy olyan négyzettel lefedni, ami nem lóg ki az ábrából. Így legkevesebb négy négyzetet kell Csongornak lerajzolnia az ábra eléréséhez.



2. Megoldás: Mutatunk egy második megoldást annak az indoklására, hogy négynél kevesebb négyzet nem elég. Indirekten tegyük fel, hogy három négyzettel meg lehet csinálni. Világos, hogy csak 1×1, 2×2 és 3×3 méretű négyzeteket használhatunk. A konfiguráció mind a négy sarkát le akarjuk fedni, így lesz olyan négyzet ami legalább kettőt fed, és ez csak úgy lehet, ha használunk egy 3×3 méretű négyzetet, amivel lefedjük az ábra kerületét.

Figyeljük meg, hogy az ábra amit le akarunk fedni 24 kis szakaszból áll. Ebből a 3×3-s négyzet amit használunk az 12-t fed. Egy 1×1-es legfeljebb 4-t fed, míg egy 2×2-es négyzet is legfeljebb 4 új kis szakaszt fed le, mivel legalább 4 kis szakaszban átfedi a lehelyezett 3×3-as négyzetet. Emiatt három négyzet amiből az egyik 3×3 méretű legfeljebb $12 + 4 + 4 = 20$ kis szakaszt fed le, azaz nem fedheti le a teljes ábrát. Így tényleg szüksége van legalább négy négyzetre Csongornak.



C2. Pisti a karantén alatt nagyon unatkozott, ezért a 11-es számból kiindulva elkezdett számokat felírni az alábbiak szerint. Ha egy x számot már felírt, akkor felírhatta

- x számjegyeinek összegét,
- $2(x+1)+1$-et,
- vagy $x+4$-et.

a) Mutassátok meg, hogy csak ezen lépések használatával Pisti bármely pozitív egész számot felírhatta.
b) Amennyiben csak az első két fajta lépést használta Pisti, akkor akárhogy is próbálkozott, nem sikerült a 2022-t felírnia. Igazoljátok, hogy nem Pisti volt ügyetlen, hanem tényleg nem lehet felírni a 2022-t.
Horváth Csongor feladata

Megoldás:

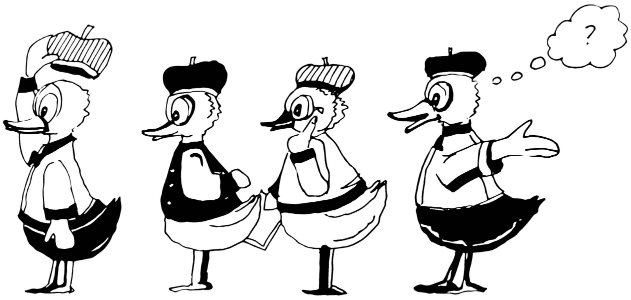
a) Minden pozitív egész szám felírható $4k+m$ alakban, ahol k természetes szám és $1 \leq m \leq 4$. Emiatt, és az $x+4$-es lépés miatt elegendő, hogy az 1, 2, 3 és 4 számok előállnak a megengedett lépésekkel a 11-ből kiindulva. Mindre mutatunk egy előállítást:

- **A 2 előállítása:** Vegyük a kiinduló érték (11) számjegyösszegét, ez pont 2.
- **Az 1 előállítása:** A kettőből kiindulva, amit az előző alapján elő tudunk állítani, végezzük el kétszer az $x+4$-es lépést, ekkor 10-et kapunk. Ezután vegyük a számjegyek összegét, hogy a kívánt 1-es értéket előállítsuk.
- **A 4 előállítása:** Az egyből kiindulva most hajtsuk végre a $2(x+1)+1$-es lépést, amivel 5-öt kapunk, majd végezzük el még egyszer ezt a lépést, így 13-at kapunk. Végül vegyük ennek a számjegyösszegét, hogy a kívánt négyes értéket előállítsuk.
- **A 3 előállítása:** A négyesből kiindulva az $x+4$ lépést végezzük el kétszer, majd vegyük a számjegyösszeget. Így megkapjuk a 12 számjegyösszegét, azaz a kívánt 3-as értéket.

Ezzel megmutattuk, hogy minden pozitív egész szám előáll a megadott kiindulópontból a feladatban szereplő lépések használatával.

b) Az állítás igazolásához azt fogjuk megmutatni, hogy a megengedett két lépés olyan, hogy nem hárommal osztható számot nem hárommal oszthatóba visz. Ezt elegendő megmutatnunk, mivel a kiinduló érték nem hárommal osztható, viszont a 2022 igen.

Ezt azonban mindkét lépésnél egyszerű látni. A számjegyösszegzés esetén a kiinduló szám hármas maradéka megegyezik a kapott érték hármas maradékával, a 3-mal való oszthatósági szabály alapján. A $2(x+1)+1=2x+3$ lépés során ha x nem osztható 3-mal akkor $2x$ sem, így $2x+3$ sem. Ezzel befejeztük a bizonyítást.



C3. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának külsejére írjuk az ABE szabályos háromszöget. Az A pont tükörképe a BE egyenesre legyen F, továbbá az E pont tükörképe a BF egyenesre legyen G. Legyen az FG szakasz felezőmerőlegesének és az AD szakasznak a metszéspontja X. Igazoljátok, hogy az X középpontú XA sugarú kör érinti az FB egyenest.
Hegedűs Dani feladata

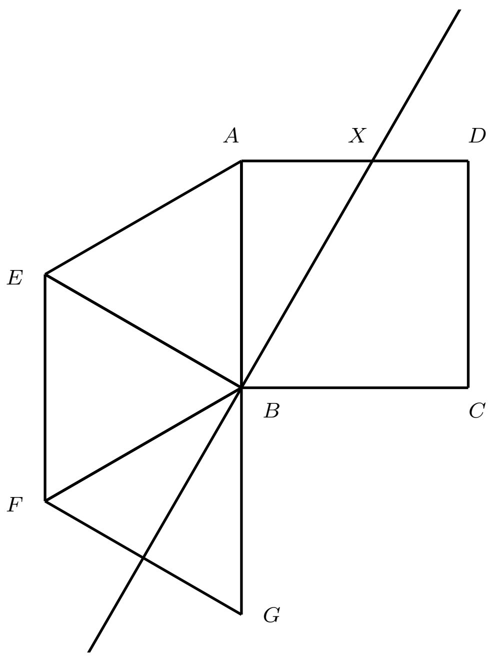
Megoldás: Mivel a tükrözés egybevágósági transzformáció, és F pont definíció szerint az A pont tükörképe a BE egyenesre, így BEF háromszög egybevágó az ABE háromszöggel, tehát BEF háromszög is szabályos. Továbbá G pont definíciója szerint, az FBG háromszög a BEF háromszög tükörképe a BF egyenesre, így egybevágóak, és emiatt FBG háromszög is szabályos.

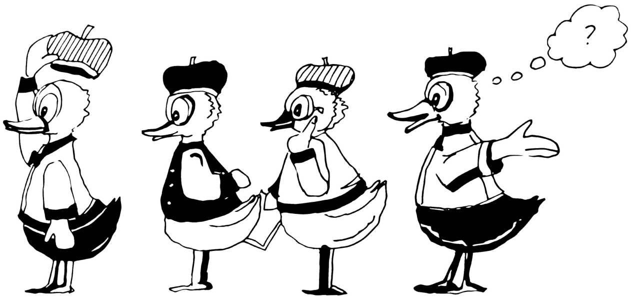
Az FBG háromszög szabályossága miatt FG szakasz felezőmerőlegese megegyezik az $FBG\sphericalangle$ szög szögfelezőjével, ami 30°-os szöget zár be a BG egyenessel.

Viszont $ABG\sphericalangle = ABE\sphericalangle + EBF\sphericalangle + FBG\sphericalangle = 60° + 60° + 60° = 180°$, így az AB egyenes megegyezik a BG egyenessel. Tehát az FG szakasz felezőmerőlegese az 30°-os szöget szár be az AB egyenessel.

Mivel X rajta van az AD egyenesen, ami merőleges AB-re, ezért X-nek az AB egyenestől vett távolsága egyenlő az XA szakasz hosszával. Emiatt az, hogy az X középpontú XA sugarú kör érinti a BF egyenest, az ugyanazt jelenti, mint hogy X távolsága a BF egyenestől XA, avagy X egyenlő távolságra van az AB és BF egyenesektől.

Ez pedig igaz, hiszen pontosan azok a pontok vannak két egyenestől egyenlő távolságra, amelyek a két egyenes által meghatározott szögfelezők valamelyikén helyezkednek el. Mivel X definíció szerint rajta van FG szakaszfelező merőlegesén, amely az $FBG\sphericalangle$ szögfelezője, így az állítást beláttuk.





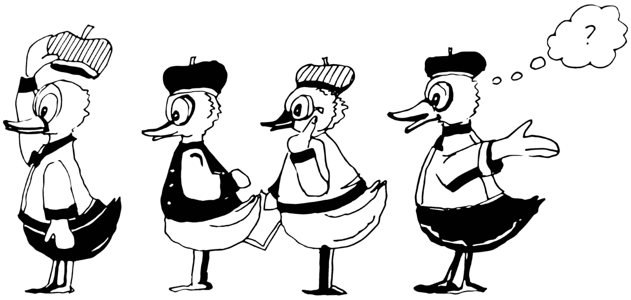
C4. **a)** Létezik-e 12 egymást követő pozitív egész szám, melyeknek az összege négyzetszám?
b) Létezik-e 11 egymást követő pozitív egész szám, melyeknek az összege négyzetszám?
c) Létezik-e 10 egymást követő pozitív egész szám, melyeknek az összege négyzetszám?
Mutassatok példát, vagy bizonyítsátok be, hogy nem létezik.
Imolay András feladata

Megoldás:

a) Válasz: Nem. Indirekt tegyük fel, hogy létezik 12 ilyen egymást követő szám. Jelölje közülük a legkisebbet n. Ezzel a jelöléssel felírhatjuk a 12 szám összegét: $n + (n + 1) + \ldots + (n + 11) = 6 \cdot (2n + 11) = 12n + 66$. Ez azonban nem osztható néggyel, de páros, így nem lehet négyzetszám.

b) Válasz: Igen. Jelölje ismét a 11 darab szám legkisebbikét n. Az összegük $11n + 55 = 11 \cdot (n + 5)$. Ha $(n + 5)$-öt 11-nek, azaz n-et 6-nak választjuk, akkor a kapott összeg $11 \cdot 11 = 121$ lesz, azaz négyzetszám.

c) Válasz: Igen. Jelölje a 10 szám legkisebbikét n, ezt használva a számok összege $10n + 45 = 5 \cdot (2n + 9)$. A $(2n + 9)$-et nem választhatjuk 5-nek, mert akkor n negatív lenne, válasszuk hát $5 \cdot 3^2 = 45$-nek. Ekkor $n = 18$, a számok összege pedig $(5 \cdot 3)^2 = 225$, ami négyzetszám.



C5. Kacsa Kató az első születésnapján tojta élete első tojását, és azóta minden nap pontosan egy tojást tojik, mindig vagy barnát, vagy szürkét, vagy narancssárgát. Azután hogy tojik, mindig felírja a füzetébe, hogy hány nappal azelőtt tojt legutóbb ugyanolyan színű tojást, méghozzá olyan színű tollat használ, amilyen színű az aktuális tojás (amikor az első tojást tojja valamelyik színből, akkor nem ír fel semmit). Kató azt vette észre, hogy eddig nem írt fel kétszer ugyanolyan számot ugyanolyan színű tollal. Legfeljebb hány tojást tojhatott eddig az életében?
Paróczi Orsi és Szűcs Gábor feladata

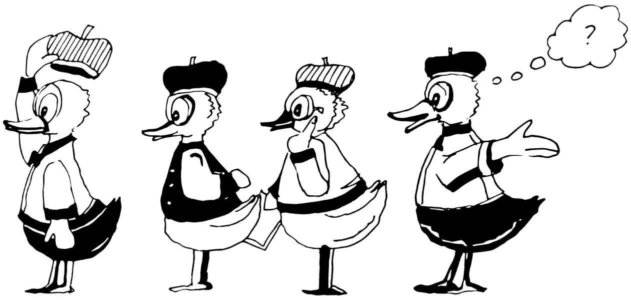
Megoldás: Legfeljebb 18 tojást tojhatott eddigi élete során Kacsa Kató. A megoldás két részből áll, először mutatunk 18-ra konstrukciót, majd belátjuk, hogy 19-et vagy többet lehetetlen elérni.

A szürke tojásokat S, a barnákat B és a narancssárgákat N betűvel jelöljük. Jó konstrukció 18 tojással:

$$NSBBSNSBNBSSNNBNSB$$

Ellenőrizhető, hogy semelyik színből sincs két egymást követő egyszínű tojás között ugyanannyi másik tojás.

Indirekten tegyük fel, hogy eddig 19 tojást tojt az életében Kató. Skatulyaelv alapján ekkor ezek között van 7 egyszínű, mondjuk barna. Mivel minden távolság különbözik a 7 tojásnál az egymást követő barnák között, ezért van legalább $0+1+2+3+4+5=15$ nem barna tojás, tehát összesen van legalább 22 tojás, ami ellentmondás, így nem tojhatott 19-t. Ám 19-nél többet sem tojhatott, mivel ekkor az első 19-et vizsgálva ugyanezzel az érveléssel ellentmondásra jutunk.

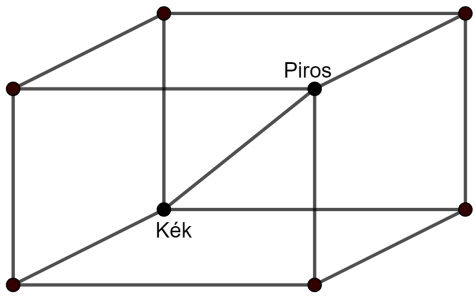


C6. **Játék:** Adott egy téglatest rácsa, aminek be van húzva az egyik testátlója. Egy lépésben az éppen soron lévő játékos megszínezi valamelyik még színezetlen csúcsot három szín valamelyikével (azaz piros, sárga vagy kék korongot tesz rá) úgy, hogy ne keletkezzen két szomszédos csúcs, amik azonos színűek. Ha valamelyik játékos nem tud lépni, akkor véget ér a játék. A kezdő játékos nyer, ha minden csúcs meg lett színezve, míg a második akkor nyer, ha van olyan csúcs ami nem lett kiszínezve.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Nagy Kartal feladata

Megoldás:
A kulcsgondolat, hogy ha meg van színezve a testátló két vége, akkor nyert a kezdő játékos, mivel ha mondjuk ez a két csúcs piros és kék színt kapott, akkor könnyű látni, hogy azon csúcsok amik a kék csúccsal szomszédosak azok biztosan kaphatnak piros színt bármi is történik, a többi csúcs pedig biztosan kaphat kék színt, így egészen biztos, hogy innentől minden csúcs meg lesz szíenzve.



A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. Az első lépésében megszínezi a testátló egyik végét, a következő lépésében pedig (ha még nincs megszínezve) akkor meg tudja színezni a testátló másik végét, mivel még van szabad szín. Ezek után biztosan minden csúcs megszíneződik, így a kezdő nyer.