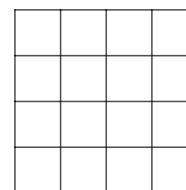


1. A Kacsakongresszus vezetőjét évente választják, azonban egy ősi szabályzat alapján egymást követő  $a$  évben vadkacsa az elnök, majd  $b$  évig házi kacsát választanak, majd megint  $a$  évig vadkacsát, utána  $b$  évig házi kacsát és így tovább ( $a$  és  $b$  pozitív egész számokat jelölnek). Tudjuk, hogy 1999-ben, 2004-ben, 2005-ben és 2011-ben vadkacsát, míg 2010-ben, 2015-ben és idén, 2022-ben házi kacsát választottak vezetőnek. Hány évet kell várnia a vadkacsáknak, hogy újra közülük kerüljön ki a kongresszus feje?

*Keressétek meg az összes megoldást, és indokoljátok, hogy más nem lehet.*

2. Orsi négyzeteket rajzol a papírjára (két lerajzolt négyzet átfedheti egymást). Néhány négyzet lerajzolása után az alábbi ábra rajzolódik ki. Legkevesebb hány négyzetet kellett Orsinak lerajzolnia ehhez?



3. a) Létezik-e 20 egymást követő pozitív egész szám, melyeknek az összege négyzetszám?  
 b) Létezik-e 21 egymást követő pozitív egész szám, melyeknek az összege négyzetszám?  
 c) Létezik-e 2022 egymást követő pozitív egész szám, melyeknek az összege négyzetszám?

*Mutassatok példát, vagy bizonyítsátok be, hogy nem létezik.*

4. Az  $ABCD$  trapéz hosszabb alapja  $AB$ , a rövidebb  $CD$ . Az  $AC$  átló felezi az  $A$  csúcsnál lévő belső szöget. A  $B$  csúcsból induló belső szögfelező az  $AC$  átlót az  $E$  pontban metszi. A  $DE$  egyenes  $F$ -ben metszi az  $AB$  szakaszt. Tegyük fel, hogy  $AD = FB$  és  $BC = AF$ . Határozzátok meg az  $ABCD$  négyszög belső szögeit, ha  $BEC \sphericalangle = 54^\circ$ .

5. Kacsa Kató az első születésnapján tojta élete első tojását, és azóta minden nap pontosan egy tojást tojik, mindig vagy barnát, vagy szürkét, vagy narancssárgát. Azután hogy tojik, mindig felírja a füzetébe, hogy hány nappal azelőtt tojt legutóbb ugyanolyan színű tojást, méghozzá olyan színű tollat használ, amilyen színű az aktuális tojás (amikor az első tojást tojja valamelyik színből, akkor nem ír fel semmit). Kató azt vette észre, hogy eddig nem írt fel kétszer ugyanolyan számot ugyanolyan színű tollal. Legfeljebb hány tojást tojhatott eddig az életében?

6. **Játék:** Adott egy téglatest rácса, aminek be van húzva az egyik testátlója. Egy lépésben az éppen soron lévő játékos megszínezi valamelyik még színezetlen csúcsot három szín valamelyikével (azaz piros, sárga vagy kék korongot tesz rá) úgy, hogy ne keletkezzen két szomszédos csúcs, amik azonos színűek. Ha valamelyik játékos nem tud lépni, akkor véget ér a játék. A kezdő játékos nyer, ha minden csúcs meg lett színezve, míg a második akkor nyer, ha van olyan csúcs ami nem lett kiszínezve.

*Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.*

*Mindegyik megoldást külön lapra írájatok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk:*