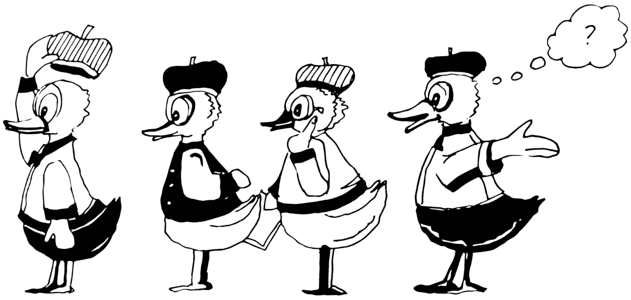
XV. DÜRER VERSENY
Döntő: 2022. február 4-6.

MATEMATIKA
MEGOLDÁSOK



D
KATEGÓRIA
Kifejtős forduló

9-12. osztályosok

D1. A Kacsakongresszus vezetőjét évente választják, azonban egy ősi szabályzat alapján egymást követő a évben vadkacsa az elnök, majd b évig házi kacsát választanak, majd megint a évig vadkacsát, utána b évig házi kacsát és így tovább (a és b pozitív egész számokat jelölnek). Tudjuk, hogy 1999-ben, 2004-ben, 2005-ben és 2011-ben vadkacsát, míg 2010-ben, 2015-ben és idén, 2022-ben házi kacsát választottak vezetőnek. Hány évet kell várnia a vadkacsáknak, hogy újra közülük kerüljön ki a kongresszus feje?
Keressétek meg az összes megoldást, és indokoljátok, hogy más nem lehet.
Döbröntei Dávid feladata

Megoldás: Nevezzük periódusnak az $a+b$ időtartamot! Mivel 2005-ben vadkacsa, majd 2010-ben házi kacsa, majd 2011-ben vadkacsa, és 2015-ben házi kacsa volt az elnök, ezért a házi kacsák legkorábban 2006-tól lehettek vezetők b évig, majd a vadkacsák a évig, legkésőbb 2014-ig, így egy periódus hossza, azaz $a + b \leq 2015 - 2006 = 9$ év.

Egy periódus különbséggel ugyanolyan fajtájú kacsák az elnökök a szabályzat alapján, és emiatt ha a különbség a periódus hosszának többszöröse, akkor szintén ugyanolyan fajtájú kacsák az elnökök. Tehát ha két évben különböző fajtájú kacsák voltak a vezetők, akkor a különbségnek a periódus nem lehet osztója.

Mivel 2022-ben házi kacsa az elnök és 2004-ben vadkacsa, így egy periódus hossza nem lehet $2022 - 2004 = 18$-nak osztója, azaz nem lehet 1, 2, 3, 6 vagy 9 év.

Mivel 2015-ben házi kacsa az elnök és 1999-ben vadkacsa, így egy periódus hossza nem lehet $2015 - 1999 = 16$-nak osztója, tehát nem lehet 4 vagy 8 év sem.

Mivel 2010-ben házi kacsa az elnök és 2005-ben vadkacsa, így egy periódus hossza nem lehet $2010 - 2005 = 5$-nek osztója, tehát nem lehet 5 év sem.

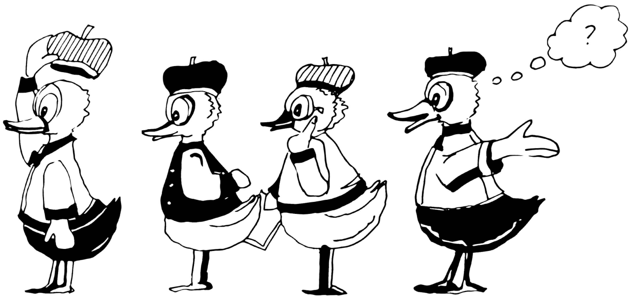
Így az egyetlen lehetséges érték az $a+b = 7$ év. Mivel 2010-ben még házi kacsa volt az elnök, de 2011-ben már vadkacsa, ezért 2011-ben kezdődött egy periódus, így ezt követően 2018-ban indult a következő, és utána 2025-ben fognak újra vadkacsát választani. Tehát 3 évet kell várniuk a vadkacsáknak, hogy újra közülük kerüljön ki a vezető.

Megjegyzés: A feladatot megoldottuk, ráadásul nem is kellett pontosan meghatározni a és b értékét. A megoldás teljessége érdekében megmutatjuk, hogy léteznek megfelelő a és b értékek, ráadásul két különböző lehetőség is van.

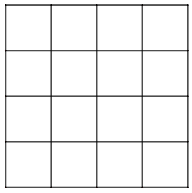
A periódusok kezdete 2025, 2018, 2011, 2004, 1997. Így 1997 és 1999 között vadkacsa az elnök, tehát $a \geq 3$, és 2011 után 2015-ben már nem vadkacsa az elnök, ezért $a \leq 4$.

Ha $a = 4$ és $b = 3$, akkor a konstrukció: 1997-2000 vadkacsa, 2001-2003 házi kacsa, 2004-2007 vadkacsa, 2008-2010 házi kacsa, 2011-2014 vadkacsa, 2015-2017 házi kacsa, 2018-2021 vadkacsa, 2022-2024 házi kacsa, 2025-2028 vadkacsa. Ez tényleg megfelelő.

Ha $a = 3$ és $b = 4$, akkor a konstrukció: 1997-1999 vadkacsa, 2000-2003 házi kacsa, 2004-2006 vadkacsa, 2007-2010 házi kacsa, 2011-2013 vadkacsa, 2014-2017 házi kacsa, 2018-2020 vadkacsa, 2021-2024 házi kacsa, 2025-2027 vadkacsa. Ez is megfelelő. Így két lehetőség van, de a kérdésre a válasz mindenképpen az, hogy 3 évet kell várniuk a vadkacsáknak.

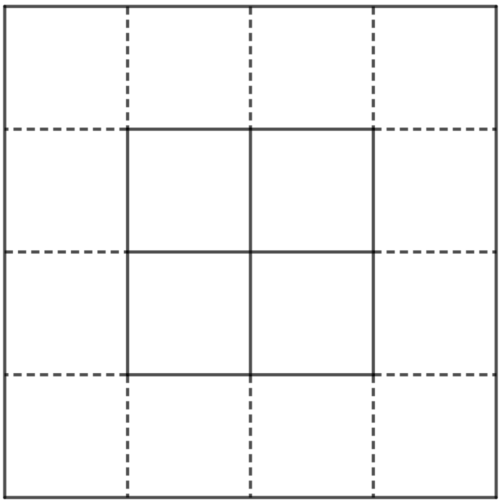


D2. Orsi négyzeteket rajzol a papírjára (két lerajzolt négyzet átfedheti egymást). Néhány négyzet lerajzolása után az alábbi ábra rajzolódik ki. Legkevesebb hány négyzetet kellett Orsinak lerajzolnia ehhez?



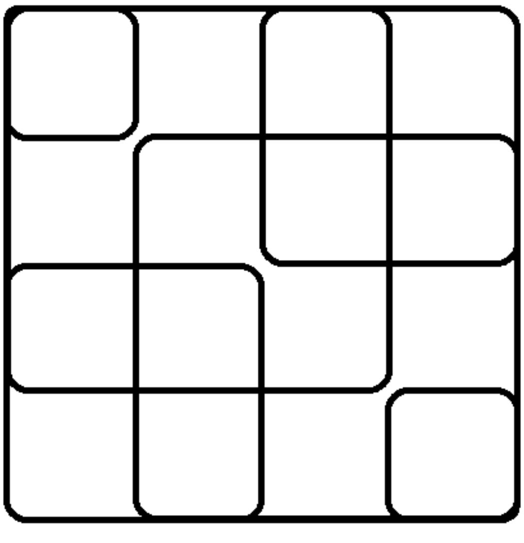
Imolay András és Nagy Kartal feladata

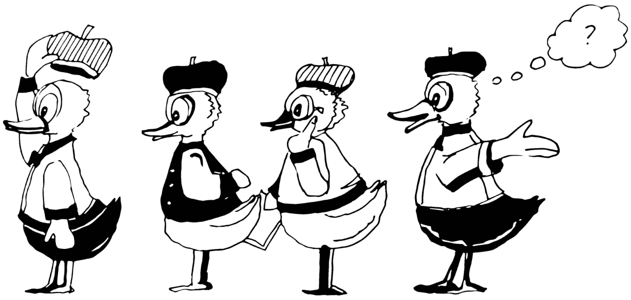
Megoldás: Hat négyzet szükséges legalább a táblázat lefedéséhez, ugyanis tekintsük a következő ábrát.



Vegyük észre, hogy bármely négyzet legfeljebb két szaggatott szakaszt fed le, és mivel az ábrán 12 szaggatott szakasz van, így legalább 6 négyzetre szükség van a négyzetrács lefedéséhez.

Hat négyzet tényleg elég, mégpedig a következőképpen lerajzolva:





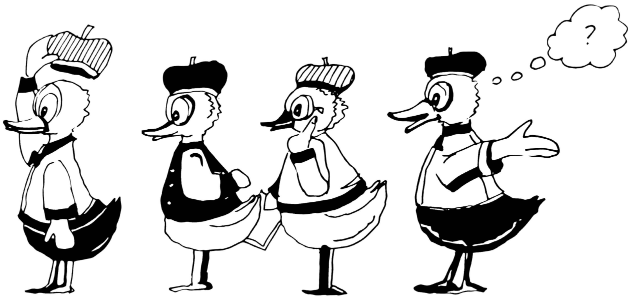
D3. **a)** Létezik-e 20 egymást követő pozitív egész szám, melyeknek az összege négyzetszám?
b) Létezik-e 21 egymást követő pozitív egész szám, melyeknek az összege négyzetszám?
c) Létezik-e 2022 egymást követő pozitív egész szám, melyeknek az összege négyzetszám?
Mutassatok példát, vagy bizonyítsátok be, hogy nem létezik.
Imolay András feladata

Megoldás:

a) Válasz: Nem. Indirekt tegyük fel, hogy létezik 20 ilyen egymást követő szám. Jelölje közülük a legkisebbet n. Ezzel a jelöléssel felírhatjuk a 20 szám összegét: $n + (n+1) + \ldots + (n+19) = 10\cdot(2n+19) = 20n+190$. Ez azonban nem osztható néggyel, de páros, így nem lehet négyzetszám.

b) Válasz: Igen. Jelölje ismét a 21 darab szám legkisebbikét n. Írjuk fel az összegüket: $21n + 210 = 21 \cdot (n+10)$. Ha $(n+10)$-et 21-nek, azaz n-et 11-nek választjuk, akkor a kapott összeg $21 \cdot 21$, azaz négyzetszám lesz.

c) Válasz: Igen. Jelölje a 2022 szám legkisebbikét n, ezt használva a számok összege $1011\cdot(2n+2021)$. $(2n+2021)$-et nem választhatjuk 1011-nek, mert akkor n negatív lenne, válasszuk hát $1011 \cdot 3^2$-nek. Ekkor $n = 3539$, a számok összege pedig $(1011 \cdot 3)^2$, ami négyzetszám.



D4. Az $ABCD$ trapéz hosszabb alapja AB, a rövidebb CD. Az AC átló felezi az A csúcsnál lévő belső szöget. A B csúcsból induló belső szögfelező az AC átlót az E pontban metszi. A DE egyenes F-ben metszi az AB szakaszt. Tegyük fel, hogy $AD = FB$ és $BC = AF$. Határozzátok meg az $ABCD$ négyszög belső szögeit, ha $BEC\sphericalangle = 54°$.
Fridrik Ricsi feladata

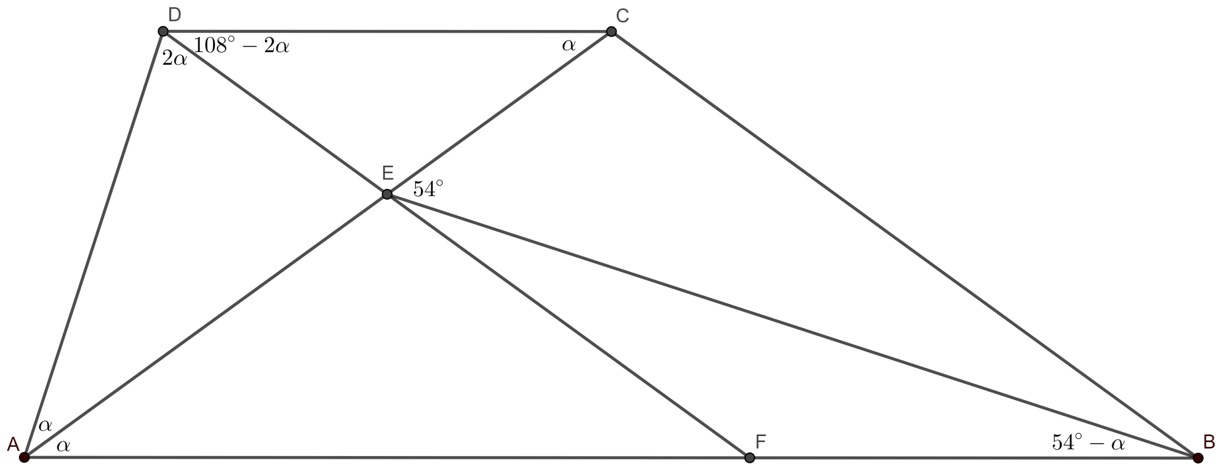
Megoldás: Legyen $BAC\sphericalangle = CAD\sphericalangle = \alpha$. Az AB oldal párhuzamos a CD oldallal, így $DCA\sphericalangle = BAC\sphericalangle = \alpha$. Így az ADC háromszög egyenlőszárú, emellé még a feladat feltételét felhasználva kapjuk, hogy $FB = AD = DC$. Az $FBCD$ négyszög paralelogramma, mivel az FB és CD oldalai egyenlő hosszúak és párhuzamosak. Ezt összevetve a feladat feltételével $AF = BC = FD$, tehát AFD háromszög egyenlőszárú, így $ADF\sphericalangle = 2\alpha$.

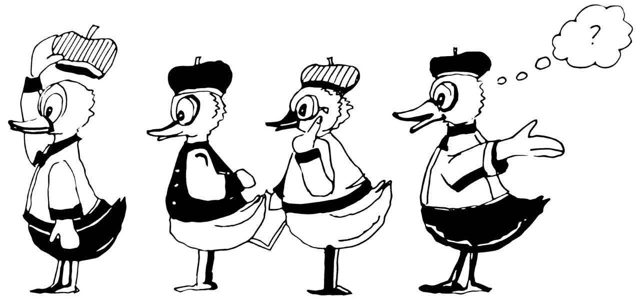
Innentől számoljunk szögeket. A $BEC\sphericalangle$ az AEB háromszög külső szöge és $54°$ fokos, így $EBA\sphericalangle = 54° - BAE\sphericalangle = 54° - \alpha$. A BE egyenes szögfelező, és $FBCD$ paralelogramma, így

$$FDC\sphericalangle = CBF\sphericalangle = 2 \cdot EBF\sphericalangle = 108° - 2\alpha.$$

$ABCD$ trapéz, így $BAD\sphericalangle + ADC\sphericalangle = 180°$, azaz $108° + 2\alpha = 180°$, így $\alpha = 36°$. Most már könnyű dolgunk van:
$BAD\sphericalangle = 2\alpha = 72°$.
$ADC\sphericalangle = 180° - BAD\sphericalangle = 108°$.
$CBA\sphericalangle = 108° - 2\alpha = 36°$.
$DCB\sphericalangle = 180° - CBA\sphericalangle = 144°$.

Megjegyzés: Tényleg létezik ilyen négyszög, azaz ha az $ABCD$ négyszögnek a szögei a fent kiszámolt értékek, akkor teljesülnek a feladat feltételei.





D5. Kacsa Kató az első születésnapján tojta élete első tojását, és azóta minden nap pontosan egy tojást tojik, mindig vagy barnát, vagy szürkét, vagy narancssárgát. Azután hogy tojik, mindig felírja a füzetébe, hogy hány nappal azelőtt tojt legutóbb ugyanolyan színű tojást, méghozzá olyan színű tollat használ, amilyen színű az aktuális tojás (amikor az első tojást tojja valamelyik színből, akkor nem ír fel semmit). Kató azt vette észre, hogy eddig nem írt fel kétszer ugyanolyan számot ugyanolyan színű tollal. Legfeljebb hány tojást tojhatott eddig az életében?
Paróczi Orsi és Szűcs Gábor feladata

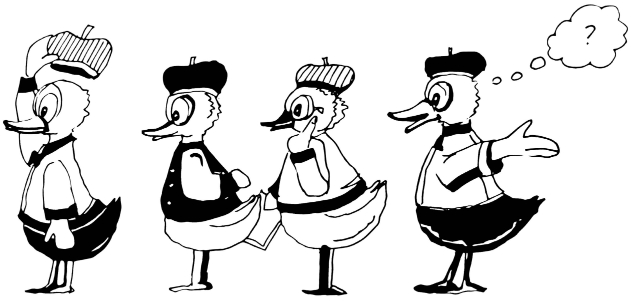
Megoldás: Legfeljebb 18 tojást tojhatott eddigi élete során Kacsa Kató. A megoldás két részből áll, először mutatunk 18-ra konstrukciót, majd belátjuk, hogy 19-et vagy többet lehetetlen elérni.

A szürke tojásokat S, a barnákat B és a narancssárgákat N betűvel jelöljük. Jó konstrukció 18 tojással:

$$NSBBSNSBNBSSNNBNSB$$

Ellenőrizhető, hogy semelyik színből sincs két egymást követő egyszínű tojás között ugyanannyi másik tojás.

Indirekten tegyük fel, hogy eddig 19 tojást tojt az életében Kató. Skatulyaelv alapján ekkor ezek között van 7 egyszínű, mondjuk barna. Mivel minden távolság különbözik a 7 tojásnál az egymást követő barnák között, ezért van legalább $0+1+2+3+4+5=15$ nem barna tojás, tehát összesen van legalább 22 tojás, ami ellentmondás, így nem tojhatott 19-t. Ám 19-nél többet sem tojhatott, mivel ekkor az első 19-et vizsgálva ugyanezzel az érveléssel ellentmondásra jutunk.

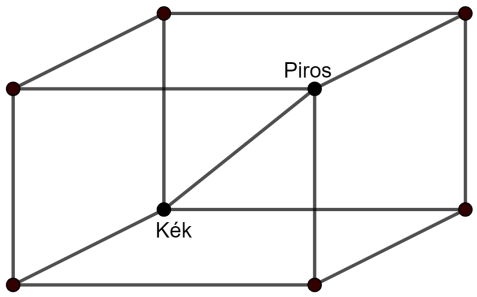


D6. **Játék:** Adott egy téglatest rácsa, aminek be van húzva az egyik testátlója. Egy lépésben az éppen soron lévő játékos megszínezi valamelyik még színezetlen csúcsot három szín valamelyikével (azaz piros, sárga vagy kék korongot tesz rá) úgy, hogy ne keletkezzen két szomszédos csúcs, amik azonos színűek. Ha valamelyik játékos nem tud lépni, akkor véget ér a játék. A kezdő játékos nyer, ha minden csúcs meg lett színezve, míg a második akkor nyer, ha van olyan csúcs ami nem lett kiszínezve.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Nagy Kartal feladata

Megoldás:
A kulcsgondolat, hogy ha meg van színezve a testátló két vége, akkor nyert a kezdő játékos, mivel ha mondjuk ez a két csúcs piros és kék színt kapott, akkor könnyű látni, hogy azon csúcsok amik a kék csúccsal szomszédosak azok biztosan kaphatnak piros színt bármi is történik, a többi csúcs pedig biztosan kaphat kék színt, így egészen biztos, hogy innentől minden csúcs meg lesz szíenzve.



A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. Az első lépésében megszínezi a testátló egyik végét, a következő lépésében pedig (ha még nincs megszínezve) akkor meg tudja színezni a testátló másik végét, mivel még van szabad szín. Ezek után biztosan minden csúcs megszíneződik, így a kezdő nyer.