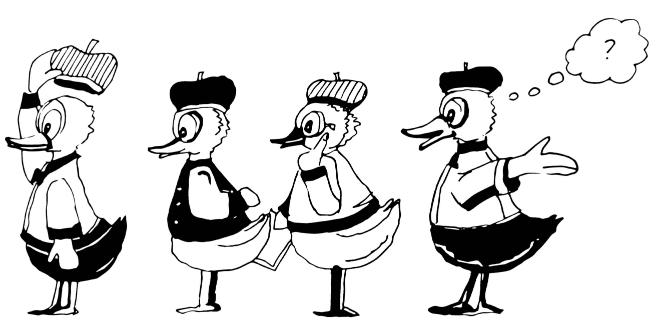
XV. DÜRER VERSENY

Döntő: 2022. február 4-6.

MATEMATIKA

FELADATSOR



E

KATEGÓRIA

Kifejtős forduló

9-12. osztályosok

---

1. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának külsejére írjuk az ABE szabályos háromszöget. Az A pont tükörképe a BE egyenesre legyen F, továbbá az E pont tükörképe a BF egyenesre legyen G. Legyen az FG szakasz felezőmerőlegesének és az AD szakasznak a metszéspontja X. Igazoljátok, hogy az X középpontú XA sugarú kör érinti az FB egyenest.

2. Anett egy 5×5-ös táblázat minden mezőjébe ír egy X-et valamilyen sorrendben. Minden X leírása után pontokat kap a következőképpen. Megnézi, hogy a leírt X sorában hány olyan X van (az éppen leírtat is beleértve), ami elérhető a leírt X-ből vízszintes lépésekkel csak X-elt mezőkön keresztül. Kap ennyi pontot, plusz ugyanígy kap pontokat a függőleges irányra.

a) Mi a lehető legtöbb pont, amit összesen kaphat mind a 25 X leírásával?

b) Mi a lehető legkevesebb pont, amit összesen kaphat mind a 25 X leírásával?

			X	
		X	X	
		X		
X	O	X		X

Például az ábrán látható helyzetben ha Anett a karikával jelölt helyre rakná a következő X-et, azzal a vízszintes irányra 3, a függőlegesre 1, tehát összesen 4 pontot szerezne.

3. Egy tanórán n diák ül egymás mellett sorban 1-től n-ig számozva. Kezdetben az 1. diáknál van n darab papírlap egy kupacban. A diákok célja, hogy szétosszák az n papírlapot úgy, hogy mindenkinek egy jusson. A tanár percenként tapsol egyet, és minden tapsra minden diák az alábbi kétfajta megengedett lépés egyikét csinálhatja (vagy nem csinál semmit):

- A nála lévő papírkupacok egyikét felosztja két kisebb papírkupacra.
- A nála 1-gyel nagyobb sorszámú diáknak odaadja az egyik papírkupacát.

Legkevesebb hányat kell tapsolnia a tanárnak, hogy az összes lapot szét tudják osztani a diákok egymás között?

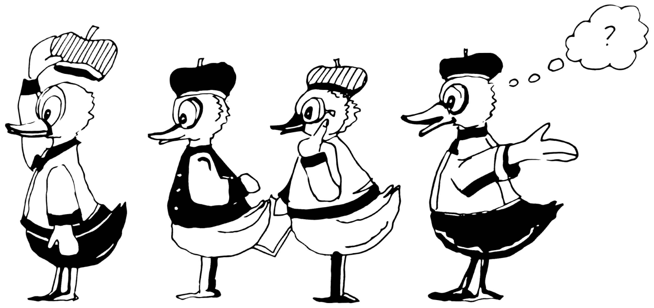
4. Igazoljátok, hogy egy $n \geq 2$ egész szám pozitív osztóit pontosan akkor lehet két részre osztani úgy, hogy a két részben a számok szorzata megegyezzen, ha n osztóinak szorzata négyzetszám.

5. Anna rajzolt egy téglalapot, melyet vízszintes és függőleges vonalak segítségével felosztott n sorra és k oszlopra. Anna tudja a keletkező $n \cdot k$ darab kis téglalap területét, míg Balázs nem tudja. Anna elárulta Balázsnak ezen kis téglalapok közül néhánynak a területét. Adott n és k esetén határozzátok meg, hogy legalább hány kis téglalap területét adta meg Anna, ha a megadott információkból Balázs meg tudja határozni mind az $n \cdot k$ darab kis téglalap területét.

30	35	25	
48	56	40	72
42		35	63

Például $n = 3$ és $k = 4$ esetén az ábrán látható 10 kis téglalap területének megadása elegendő a maradék két kis téglalap területének meghatározásához.

A feladatsor a hátoldalon folytatódik!



6. Játék: Adott $n \leq 25$ mező egy sorban, kezdetben a bal szélső mezőbe egy piros, a jobb szélső mezőbe pedig egy kék korongot helyezünk. A kezdő játékos a piros, a másik a kék korongokkal van. Egy lépés során a soron következő játékos háromféle lehetőség közül választ:

- Egy saját színű korongot egy vagy kettő mezővel odébb helyez egy üres mezőbe (ezzel akár át is lehet ugrani másik korongot).
- Rak egy saját színű korongot egy olyan üres mezőbe, ami szomszédos egy mezővel, amiben a saját korongja van.
- Passzol, azaz nem csinál semmit.

Bármelyik lépés után, amikor egy üres mezőbe belekerül egy korong, akkor az összes ezzel a színnel ellentétes színű korong, ami ezzel szomszédos mezőben van, átszíneződik.
Ha a játék során bármikor több, mint $\frac{n}{2}$ piros korong van a táblán, a piros játékos azonnal nyer, míg ha bármikor legalább $\frac{n}{2}$ kék korong van, akkor a kék játékos azonnal nyer. Ha 200 lépésig egyik se következik be, akkor a kék játékos nyer.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Az n szám ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XV. Dürer Verseny szervezői