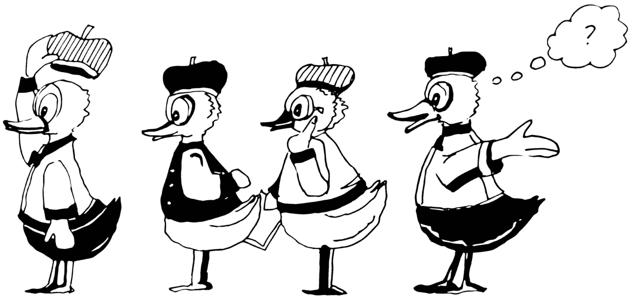
XV. DÜRER VERSENY
Döntő: 2022. február 4-6.

MATEMATIKA
MEGOLDÁSOK



E
KATEGÓRIA
Kifejtős forduló
9-12. osztályosok

E1. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának külsejére írjuk az ABE szabályos háromszöget. Az A pont tükörképe a BE egyenesre legyen F, továbbá az E pont tükörképe a BF egyenesre legyen G. Legyen az FG szakasz felezőmerőlegesének és az AD szakasznak a metszéspontja X. Igazoljátok, hogy az X középpontú XA sugarú kör érinti az FB egyenest.
Hegedűs Dani feladata

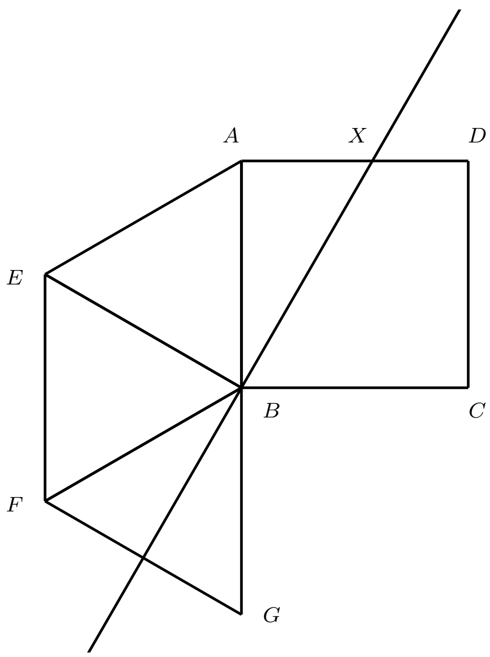
Megoldás: Mivel a tükrözés egybevágósági transzformáció, és F pont definíció szerint az A pont tükörképe a BE egyenesre, így BEF háromszög egybevágó az ABE háromszöggel, tehát BEF háromszög is szabályos. Továbbá G pont definíciója szerint, az FBG háromszög a BEF háromszög tükörképe a BF egyenesre, így egybevágóak, és emiatt FBG háromszög is szabályos.

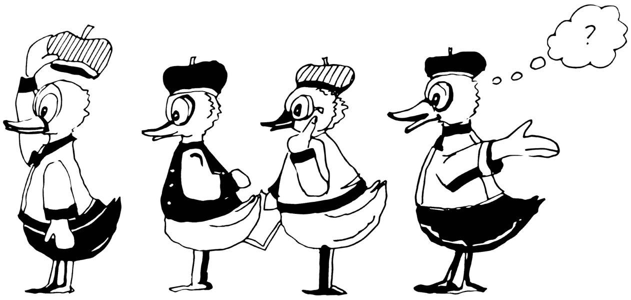
Az FBG háromszög szabályossága miatt FG szakasz felezőmerőlegese megegyezik az $FBG\sphericalangle$ szög szögfelezőjével, ami 30°-os szöget zár be a BG egyenessel.

Viszont $ABG\sphericalangle = ABE\sphericalangle + EBF\sphericalangle + FBG\sphericalangle = 60° + 60° + 60° = 180°$, így az AB egyenes megegyezik a BG egyenessel. Tehát az FG szakasz felezőmerőlegese az 30°-os szöget szár be az AB egyenessel.

Mivel X rajta van az AD egyenesen, ami merőleges AB-re, ezért X-nek az AB egyenestől vett távolsága egyenlő az XA szakasz hosszával. Emiatt az, hogy az X középpontú XA sugarú kör érinti a BF egyenest, az ugyanazt jelenti, mint hogy X távolsága a BF egyenestől XA, avagy X egyenlő távolságra van az AB és BF egyenesektől.

Ez pedig igaz, hiszen pontosan azok a pontok vannak két egyenestől egyenlő távolságra, amelyek a két egyenes által meghatározott szögfelezők valamelyikén helyezkednek el. Mivel X definíció szerint rajta van FG szakaszfelező merőlegesén, amely az $FBG\sphericalangle$ szögfelezője, így az állítást beláttuk.





E2. Anett egy 5×5-ös táblázat minden mezőjébe ír egy X-et valamilyen sorrendben. Minden X leírása után pontokat kap a következőképpen. Megnézi, hogy a leírt X sorában hány olyan X van (az éppen leírtat is beleértve), ami elérhető a leírt X-ből vízszintes lépésekkel csak X-elt mezőkön keresztül. Kap ennyi pontot, plusz ugyanígy kap pontokat a függőleges irányra.

a) Mi a lehető legtöbb pont, amit összesen kaphat mind a 25 X leírásával?

b) Mi a lehető legkevesebb pont, amit összesen kaphat mind a 25 X leírásával?

Például az ábrán látható helyzetben ha Anett a karikával jelölt helyre rakná a következő X-et, azzal a vízszintes irányra 3, a függőlegesre 1, tehát összesen 4 pontot szerezne.

			X	
		X	X	
		X		
X	◯	X		X

Imolay András feladata

Megoldás: a) Anett akármilyen sorrendben rakja le az X-eket, a lerakásai során minden sorért és oszlopért pontosan 5-ször fog pontot kapni. Egy adott sorért legfeljebb $1+2+3+4+5$ pontot kaphat, mivel például a sorba 3.-ként lekerülő X-hez a sorért járó pont legfeljebb 3. Ugyanez az oszlopokra is elmondható, így összesen legfeljebb $(5+5) \cdot (1+2+3+4+5) = 150$ pontot kaphat.

Ennyit ügyes sorrenddel el is érhet: első körben rakjon egy X-et a középső mezőre, majd a másodikban ennek oldalszomszédaiba. Az ezt követő körökben mindig az előző körben lerakott X-ek eddig üres oldalszomszédaiba rakjon, ezzel a közepétől kifele haladva kitölve a táblázatot. A kitöltés során minden sorban és oszlopban egymást követő mezőkön vannak X-ek, ezért bármely sorban vagy oszlopban az i. beírt X-ért i oszlop-, vagy sor-pontot kap, ezért összesen $(5+5) \cdot (1+2+3+4+5) = 150$-et.

		X		

		X		
	X	X	X	
		X		

		X		
	X	X	X	
X	X	X	X	X
	X	X	X	
		X		

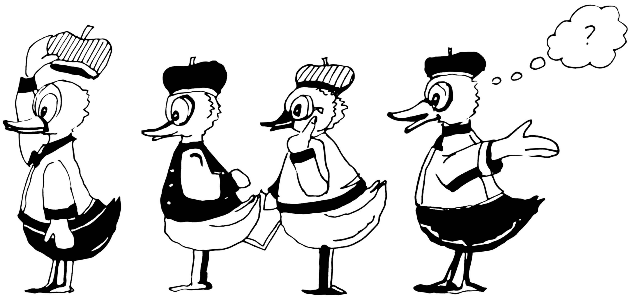
	X	X	X	
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
	X	X	X	

X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X

b) Az a) részhez hasonlóan vizsgáljuk meg, hogy egy sorért (vagy oszlopért) legalább hány pontot kaphat Anett. A sorban 5.-ként lerakott X-re biztosan 5 sor-pontot fog kapni, az elsőért biztosan 1-et. Kétféleképpen is szerezhet összesen 11 pontot egy sorra: ha először a középső, illetve a szélső mezőket tölti ki, akkor összesen $1+1+1+3+5 = 11$ pontot kap. Ha pedig először (tetszőleges sorrendben) kitölti a szélső 2-2 mezőt, és utolsónak a középső mezőt, akkor $1+2+1+2+5 = 11$ pontot kap.

Ennél kevesebbet nem kaphat, mivel ha az utolsónak beírt X a középső mezőbe kerül, akkor mindenképpen 11 pontot kap. Ha az utolsó X a széléről 2. mezőbe kerül, akkor az egyik oldalán lévő 3 mezőben az utolsónak berakott X 3 sor-pontot ér, a többi pedig legalább 1-et, így ekkor is minimum $1+5+1+3+1 = 11$ pontot kap. Ha pedig a szélére rak utoljára X-et, akkor a maradék 4 közül az utolsónak berakottért jár 4 pont, így összesen minimum $5+4+1+1+1 = 12$ pontot kap így is. Az pedig el is érhető, hogy minden sorért és oszlopért 11 pont járjon:

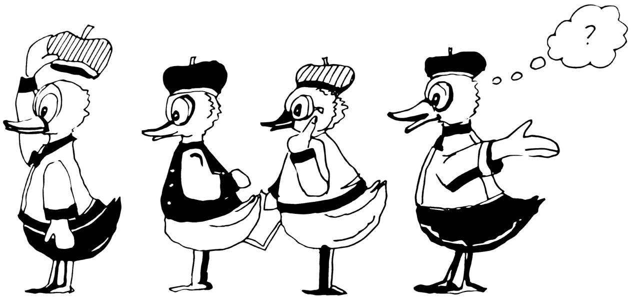
Színezzük a táblázatot sakktáblaszerűen úgy, hogy a középső mező legyen fekete, majd rakjunk minden fekete színű mezőbe X-et. Ezután kívülről a közepe fele haladva töltsük ki: tetszőleges sorrendben írjunk a táblázat eddig üres szélső mezőibe, majd a hiányzó mezőket is töltsük ki tetszőleges sorrendben. Ekkor minden sor és oszlop a fent leírt két 11-pontos módszer egyikével lesz kitöltve, ezért ez tényleg egy optimális megoldás, tehát a minimális szerezhető pontszám $(5+5) \cdot 11 = 110$.



X		X		X
	X		X	
X		X		X
	X		X	
X		X		X

X	X	X	X	X
X	X		X	X
X		X		X
X	X		X	X
X	X	X	X	X

X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X



E3. Egy tanórán n diák ül egymás mellett sorban 1-től n-ig számozva. Kezdetben az 1. diáknál van n darab papírlap egy kupacban. A diákok célja, hogy szétosszák az n papírlapot úgy, hogy mindenkinek egy jusson. A tanár percenként tapsol egyet, és minden tapsra minden diák az alábbi kétfajta megengedett lépés egyikét csinálhatja (vagy nem csinál semmit):

- A nála lévő papírkupacok egyikét felosztja két kisebb papírkupacra.
- A nála 1-gyel nagyobb sorszámú diáknak odaadja az egyik papírkupacát.

Legkevesebb hányat kell tapsolnia a tanárnak, hogy az összes lapot szét tudják osztani a diákok egymás között?
Nagy Kartal feladata

Megoldás:

Ha $n = 1$, akkor 0 taps kell a szétosztáshoz.

Ha $n = 2$, akkor az első tapsra az első ember kettészedi a kupacot, míg a másodikra továbbadja a lapot a másodiknak, azaz 2 tapsra van szüksége.

Most nézzük meg általánosan $n > 2$ esetén. Ebben az esetben $n + 1$ tapsra lesz szükség.

Legyen az első ember stratégiája a következő: amíg van legalább 3 lap előtte, csinálja felváltva a következő két lépést:

- Levesz két lapot a kupacból.
- Továbbadja a két lapos kupacot a második embernek.

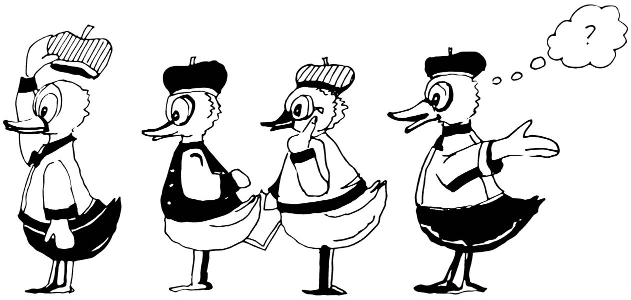
Ha eredetileg páros sok lap volt, akkor $n - 1$ lépés után már csak 2 lap marad nála. Ekkor n-edik lépésben kettéválasztja a két lapot, majd az $n + 1$-edik lépésben odaadja az egyik lapot a másodiknak. Ha eretedileg páratlan sok lap volt, akkor n lépés után már csak 1 lap marad nála, és az $n + 1$-edik lépésben nem csinál semmit.

Mindenki másnak a stratégiája:

- Ha a $k < n - 1$-edik lépés során kap egy kupac lapot, akkor a $k + 1$. lépésben továbbadja azt.
- Ha a $k = n - 1$-edik lépés során kap egy kupacot (két lapot), akkor a következő két lépésben kettészedi azt, és az egyiket továbbadja belőle. (Emiatt a $k = n$-edik lépés során senki nem kaphat lapot, mivel abban a lépésben mindenki kupacot oszt ketté.)
- Ha a $k = n + 1$-edik lépés során kap egy lapot, akkor azt megtartja.

Könnyű meggondolni, hogy ezzel a módszerrel $n + 1$ taps után tényleg mindenkinél pontosan 1 lap lesz.

Most még megmutatjuk, hogy ha $n \geq 3$, akkor nem elég n lépés a lapok szétosztásához. Ahhoz hogy az n-edik ember kapjon egy lapot, ahhoz azt a lapot $n-1$-szer kell továbbadni, vagyis maximum egyszer lehet azt a kupacot szétválasztani. Az első ember az első lépésben nem adhatja tovább a teljes kupacot, mert akkor ő lap nélkül maradna. Vagyis az első embernek az első két lépésének annak kell lennie, hogy levesz egy lapot, majd azt továbbadja. Ekkor viszont az $n-1$-edik ember legalább $2+1+(n-2) = n+1$ lépés után kaphatja meg a saját lapját, vagyis nem lehetséges, hogy n taps alatt szétosszák a lapokat.



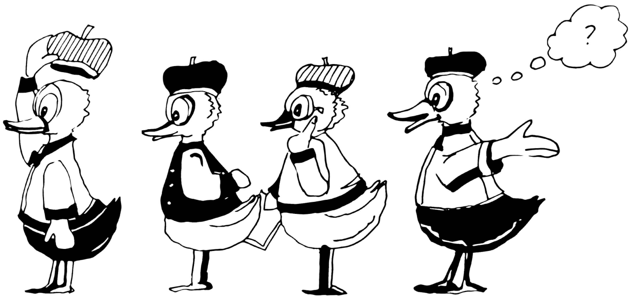
E4. Igazoljátok, hogy egy $n \geq 2$ egész szám pozitív osztóit pontosan akkor lehet két részre osztani úgy, hogy a két részben a számok szorzata megegyezzen, ha n osztóinak szorzata négyzetszám.
Imolay András feladata

Megoldás: Az egyik irány világos, ha mindkét csoportban k a számok szorzata, akkor az osztók szorzata k^2, azaz négyzetszám. Most bizonyítsuk be, hogy ez egy elégséges feltétel is.

1. eset: n nem négyzetszám. Jelöljük n osztóinak a számát $d(n)$-nel. Ha n nem négyzetszám, akkor $d(n)$ egy páros szám lesz, azaz $2l$ alakú, ahol l egy pozitív egész szám. Az osztókat osztópárokba lehet osztani, amikben a párok szorzata n. Az osztópárok száma l, tehát az összes osztó szorzata n^l. Mivel n nem egy négyzetszám, ezért n^l pontosan akkor lesz az, ha l páros, azaz $2m$ alakú. Ha ez teljesül, akkor ha az egyik csoportba berakunk m osztópárt és a másikba a többi m osztópárt, akkor mindkét csoportban n^m lesz az osztók szorzata. Ezzel az 1. esetet beláttuk.

2. eset: n egy négyzetszám. Ekkor $d(n)$ egy páratlan szám. Az n szám osztóit $\sqrt{n}$ kivételével osztópárokba lehet osztani, amikben az osztók szozata n lesz, azaz egy négyzetszám. Tehát az osztópárok szorzata is négyzetszám, azaz ha az összes osztó szorzata négyzetszám, akkor $\sqrt{n}$ is az, tehát n egy négyzetszám négyzete, azaz egy negyedik hatvány.

Legyen $n = x^4$ (ahol x egy pozitív egész szám). Ekkor n prímtényezős felbontásában bármely prímszám kitevője a 4 egyik többszöröse. Legyenek a prímosztói p_1, p_2, p_3, $\ldots$, p_r. Legyen p_1 kietvője a_1, p_2 kietvője a_2, $\ldots$, p_r kietője a_r. Ekkor $d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_r+1)$, ahol $4|a_1, a_2, \ldots, a_r$, azaz $d(n)$ $4m+1$ alakú számok szorzata, azaz szintén $4m+1$ alakú. Legyen $d(n) = 4m+1$. Vegyük ki az osztók közül az 1-et, x-et, x^2-et, x^3-öt és x^4-t. A maradék $4m-4 = 4(m-1)$ osztót (ami $2(m-1)$ osztópárt alkot) osszuk be a korábban látott módszerrel két csoportba úgy, hogy mindkettőben n^{m-1} legyen a számok szorzata (ha $m-1=0$ akkor mindkét csoport üres lesz). Ezenkívül az egyik csoportba rakjuk még be az 1-et, x-et és x^4-t, a másikba pedig az x^2 és x^3 számokat. Ekkor mindkét csoportban $n^{m-1} \cdot x^5$ lesz a számok szorzata. Ezzel a második esetet is beláttuk, így befejeztük a bizonyítást.



E5. Anna rajzolt egy téglalapot, melyet vízszintes és függőleges vonalak segítségével felosztott n sorra és k oszlopra. Anna tudja a keletkező $n \cdot k$ darab kis téglalap területét, míg Balázs nem tudja. Anna elárulta Balázsnak ezen kis téglalapok közül néhánynak a területét. Adott n és k esetén határozzátok meg, hogy legalább hány kis téglalap területét adta meg Anna, ha a megadott információkból Balázs meg tudja határozni mind az $n \cdot k$ darab kis téglalap területét.
Például $n = 3$ és $k = 4$ esetén az ábrán látható 10 kis téglalap területének megadása elegendő a maradék két kis téglalap területének meghatározásához.

30	35	25	
48	56	40	72
42		35	63

Imolay András feladata

Megoldás: $n + k - 1$.

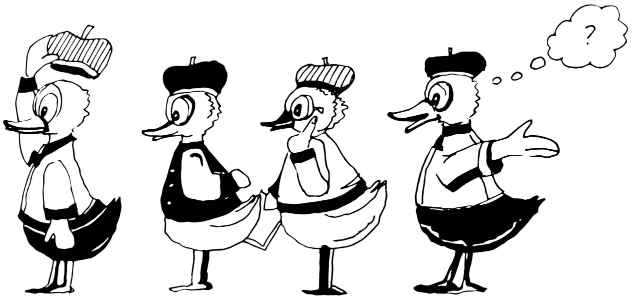
Vegyük észre, hogy ha két sor és két oszlop által meghatározott négy kis téglalapból háromnak meg van adva a területe, akkor a negyediknek is meg tudjuk határozni. Ennek a bizonyításához legyen a két sor magassága a és b, a választott oszlopok szélessége c és d. Adott ac, ad és bc, ekkor $bd = \frac{ad \cdot bc}{ac}$, így tényleg tudjuk a negyedik téglalap területét is.

Felső becslés: Adjuk meg az első sor és első oszlopban lévő összes kis téglalap területét. Ez tényleg $n + k - 1$ kis téglalap, és ha $l, m \geq 2$ akkor az l. sor és m. oszlopban lévő kis téglalap területét is meg tudjuk határozni, mivel az 1. és l. sor illetve az 1. és m. oszlop által meghatározott négy kis téglalapból háromnak tudjuk a területét.

Alsó becslés: Mutatunk egy gondolatmenetet az alsó becslésre. Tekintsük azt a páros gráfot, aminek $n+k$ csúcsa van, a csúcsok az oszlopokhoz és a sorokhoz tartoznak, és akkor van összekötve az l. sorhoz és az m. oszlophoz tartozó csúcs, ha az l. sor és m. oszlopban lévő téglalap területe meg van adva. Tegyük fel, hogy kevesebb, mint $n+k-1$ megadott téglalappal meg lehet oldani. Ekkor a gráfban kevesebb, mint $n + k - 1$ él van behúzva, azaz nem összefüggő a gráf. Ez azt jelenti, hogy a sorokat lehet partícionálni A és B részekre (A és B a sorok nemüres részhalmazait jelölik), és az oszlopokat C és D nemüres részekre úgy, hogy csak az A és C illetve a B és D által meghatározott téglalapok között vannak olyan téglalapok, amiknek meg van adva a területe. Ekkor az A-ban lévő sorok magasságát növeljük kétszeresére, a C-ben lévő oszlopok szélességét csökkentsük a felére. Így egyik megadott terület sem változik, ám egy téglalap, amit egy A-beli sor és egy D-beli oszlop határoz meg, annak a területe a kétszeresére nő, tehát nem tudja Balázs egyértelműen meghatározni a kimaradó területeket.

2. Megoldás: Az alsó becslésre mutatunk egy másik indoklást, ami nehéz, egyetemi módszereket alkalmaz. Figyeljük meg, hogy az első oszlop szélességét elárulhatjuk, hogy 1, mivel ha alapból a lenne, akkor az oszlopok szélességét a-val osztjuk, a sorok magasságát a-val szorozzuk. Ekkor könnyű látni, hogy Balázs pontosan akkor tudja meghatározni az összes területet, ha az összes sor magasságát és oszlop szélességét meg tudja határozni.

Egy téglalap területének megadása azt jelenti, hogy megadjuk $a \cdot b$ értékét, ahol a a sor magassága, b az oszlop szélessége. Tekintsük mindennek a logaritmusát. Ekkor $\log a + \log b$ van megadva. Összesen $n+k-1$ ismeretlen van, így kell legalább ennyi lineáris egyenlet, hogy meg tudjuk határozni az összeset, ezzel az alsó becslést bizonyítottuk.



E6. **Játék:** Adott $n \leq 25$ mező egy sorban, kezdetben a bal szélső mezőbe egy piros, a jobb szélső mezőbe pedig egy kék korongot helyezünk. A kezdő játékos a piros, a másik a kék korongokkal van. Egy lépés során a soron következő játékos háromféle lehetőség közül választ:

- Egy saját színű korongot egy vagy kettő mezővel odébb helyez egy üres mezőbe (ezzel akár át is lehet ugrani másik korongot).
- Rak egy saját színű korongot egy olyan üres mezőbe, ami szomszédos egy mezővel, amiben a saját korongja van.
- Passzol, azaz nem csinál semmit.

Bármelyik lépés után, amikor egy üres mezőbe belekerül egy korong, akkor az összes ezzel a színnel ellentétes színű korong, ami ezzel szomszédos mezőben van, átszíneződik.

Ha a játék során bármikor több, mint $\frac{n}{2}$ piros korong van a táblán, a piros játékos azonnal nyer, míg ha bármikor legalább $\frac{n}{2}$ kék korong van, akkor a kék játékos azonnal nyer. Ha 200 lépésig egyik se következik be, akkor a kék játékos nyer.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Az n szám ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.
Váli Benedek feladata

Megoldás: Vizsgáljuk meg a játékot először kis n-re. $n = 1$ esetén a bal és szélső mezők ugyanazok, a játéknak nincs értelme. $n = 2$ esetén a kék játékos azonnal nyert a kezdőállásban. $n = 3$ és 4 esetén a piros játékos a kezdőkorongjának mozgatásával a kék játékos korongját át tudja színezni, így könnyen nyer.

$n = 5$ esetén ha valamelyik játékos úgy dönt, hogy passzolás helyett áthelyezi a korongját, vagy új korongot rak le, a másik játékos a saját korongját áthelyezve könnyen nyer. Így az első játékosnak mindig passzolnia éri meg, és a második játékos erre passzolásokkal válaszolva nyer.

Innen kezdve általános $n \geq 6$-tal dolgozunk. Nevezzükel a tábla középső (vagy páros n esetén a középső kettő közül a jobb oldali) mezőjét a kritikus mezőnek.

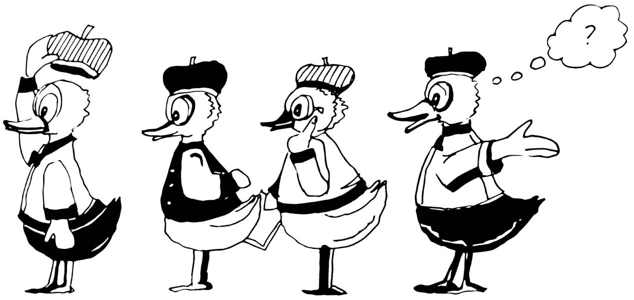
Először is vegyük észre, hogy a legjobbrább lévő piros korong mindig balrább lesz mint a legbalrább lévő kék korong. Ha nem így lenne, akkor lenne egy olyan lépés a játék folyamán, amikor először olyan állás alakul ki, viszont az könnyen meggondolható, hogy az a lépés nem lehetett egyik fajta sem, tehát ellentmondásra jutunk.

Nevezzük azon állásokat kritikusnak, amikor az egyik játékosnak a kritikus mezőtől 2 illetve 3 távolságra lévő mezőkön vannak korongjai úgy, hogy a másik játékosnak nincsenek ilyen távolságokra korongjai a kritikus mezőtől (és közelebb se). Azt állítjuk, hogy amelyik játékos el tud érni számára egy kritikus állást, annak a játékosnak van nyerő stratégiája. Nevezzük ezt a játékost X játékosnak. X játékos tehát az a játékos, aki garantálni tudja, hogy hamarabb legyenek a kritikus mezőtől 2 illetve 3 távolságra korongjai, mint az ellenfelének.

A pálya szimmetriája miatt páratlan n-re a piros játékos lesz X. Páros n esetén pedig két részeset van: $n = 4k$ esetén mivel a piros játékosnak legalább k lépésre van szüksége, hogy legyenek korongjai 2 ill. 3 távolságra a kritikus mezőtől, a kék játékosnak pedig csak $k - 1$, így a kék lesz X, $n = 4k + 2$ esetén pedig a kéknek is k darab lépés kell, így a piros lesz X. Páratlan n-ekre ez a következőképp alakul: $n = 4k + 1$ és $n = 4k + 3$ esetén is mindkét játékosnak k darab lépésre van szüksége hogy elérje a fentebbi állást.

X nyerő stratégiája a következő: A kezdőállásból a lehető legkevesebb lépéssel érjen el kritikus állást számára, majd az alábbi stratégia szerint folytassa a játékot:

1. eset: Amennyiben az ellenfele a következő lépésben korongot helyez a kritikus mezőre: X rak egy új, saját színű korongot a kritikus mezőtől 1 távolságra lévő, saját korongjával szomszédos mezőre. Így az ellenfél egyetlen korongja átszíneződik, és X így könnyen nyer. Az ellenfélnek azért csak egyetlen korongja lehet, mert feltettük hogy X a lehető legkevesebb lépésből eléri a kritikus állást, ami k vagy $k - 1$ n négyes maradéka szerint.



2. eset: Amennyiben ellenfele a következő lépésben nem ugrik be a kritikus mezőre. Ekkor X a következő lépésében áthelyezi a kritikus mezőtől kettő távolságra lévő korongját a kritikus mezőre. Amennyiben az ellenfél játékos valamely következő lépésével átszínezné a kritikus mezőn álló korongot, úgy X a kritikus mezőtől három távolságra lévő korongját a kritikus mező mellé áthelyezve azt vissza tudja színezni. Amennyiben az ellenfél játékos nem színezte át a kritikus mezőn álló korongot, X amennyiben tud, a kezdő mezőjétől legtávolabbi korongja melletti, az ellenfele kezdőmezője felé lévő szomszédos mezőre helyez le egy új korongot, vagy amennyiben ez nem lehetséges, mert már tartalmaz korongot, akkor "feltölti" a kritikus mezőtől a saját kezdőmezője felé lévő üres mezőket. Ezt a megfelelő sorrendben téve (nem a kritikus mező melletti mezőt először feltöltve) X könnyen megnyeri a játékot.

A fentebb leírt stratégia alapján $n \geq 6$-ra a piros játékosnak van nyerő stratégiája amennyiben $4 \mid n$, különben pedig a kék játékosnak van nyerő stratégiája. A stratégia kizárja, hogy egy játék $n \geq 6$ esetén kétszáz lépésig tartson, így mindig vagy a piros játékos fogja elérni hogy legyen több mint $\frac{n}{2}$ korongja a pályán, vagy a kék hogy legyen legalább $\frac{n}{2}$.