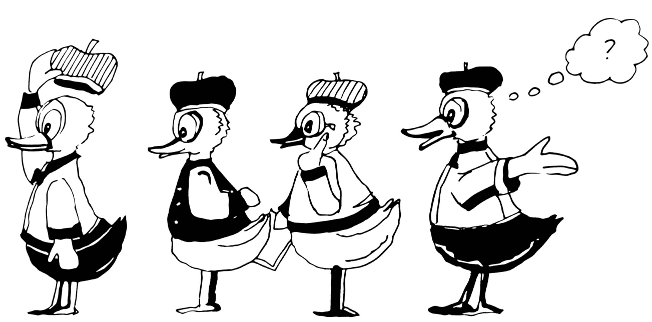
XV. DÜRER VERSENY

Döntő: 2022. február 4-6.

MATEMATIKA

FELADATSOR



E+

KATEGÓRIA

Kifejtős forduló

9-12. osztályosok

---

1. Legyen $c \geq 2$ egy rögzített egész szám. Legyen $a_1 = c$ és minden $n \geq 2$ esetén $a_n = c \cdot \varphi(a_{n-1})$. Mely c számok esetén lesz az (a_n) sorozat korlátos?
φ az Euler-féle fí-függvényt jelöli, tehát $\varphi(n)$ azon egészek száma az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazban, melyek relatív prímek n-hez.
Egy (x_n) sorozatot korlátosnak nevezünk, ha létezik olyan D konstans, hogy $|x_n| < D$ minden n pozitív egész szám esetén.

2. Anna rajzolt egy téglalapot, melyet vízszintes és függőleges vonalak segítségével felosztott n sorra és k oszlopra. Anna tudja a keletkező $n \cdot k$ darab kis téglalap területét, míg Balázs nem tudja. Anna elárulta Balázsnak ezen kis téglalapok közül néhánynak a területét. Adott n és k esetén határozzátok meg, hogy legalább hány kis téglalap területét adta meg Anna, ha a megadott információkból Balázs meg tudja határozni mind az $n \cdot k$ darab kis téglalap területét.
Például $n = 3$ és $k = 4$ esetén az ábrán látható 10 kis téglalap területének megadása elegendő a maradék két kis téglalap területének meghatározásához.

30	35	25	
48	56	40	72
42		35	63

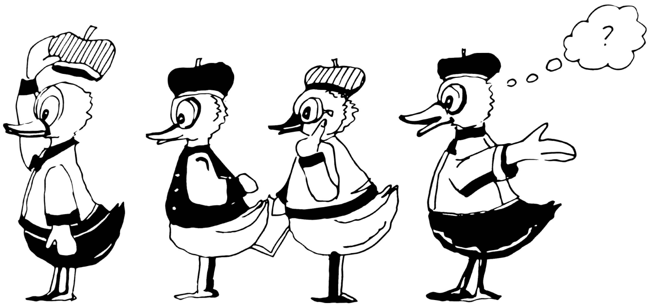
3. Legyenek x, y, z pozitív valós számok, melyekre $x + y + z = 1$, valamint $x > yz$, $y > zx$ és $z > xy$. Bizonyítsátok be, hogy

$$\left(\frac{x - yz}{x + yz}\right)^2 + \left(\frac{y - zx}{y + zx}\right)^2 + \left(\frac{z - xy}{z + xy}\right)^2 < 1.$$

4. Legyen $ABCD$ olyan húrnégyszög, melynek az átlói merőlegesek. Jelölje az $ABCD$ négyszög körülírt körének középpontját O, az átlók metszéspontját E, továbbá az E pont merőleges vetületét az AB és BC oldalakon rendre J és K. Legyen F, G és H rendre az OE, AD és DC szakaszok felezőpontja. Mutassátok meg, hogy a GJ, FB és HK egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

5. Egy kerek asztal körül n ember ül, kezdetben mindenki leír egy egész számot a papírjára. Innentől kezdve percenként, egyszerre mindenki leírja a lapjára azt a számot, amit úgy kap, hogy a saját számából kivonja a tőle jobbra ülő számát, majd a régi számot letörli. Határozzátok meg azokat az n számokat, melyekhez létezik olyan k egész szám, hogy bármilyen számokat is választottak az emberek eredetileg, k perc után mindenki előtt n-nel osztható szám fog állni.

A feladatsor a hátoldalon folytatódik!



6. Játék: Adott $n \leq 25$ mező egy sorban, kezdetben a bal szélső mezőbe egy piros, a jobb szélső mezőbe pedig egy kék korongot helyezünk. A kezdő játékos a piros, a másik a kék korongokkal van. Egy lépés során a soron következő játékos háromféle lehetőség közül választ:

- Egy saját színű korongot egy vagy kettő mezővel odébb helyez egy üres mezőbe (ezzel akár át is lehet ugrani másik korongot).
- Rak egy saját színű korongot egy olyan üres mezőbe, ami szomszédos egy mezővel, amiben a saját korongja van.
- Passzol, azaz nem csinál semmit.

Bármelyik lépés után, amikor egy üres mezőbe belekerül egy korong, akkor az összes ezzel a színnel ellentétes színű korong, ami ezzel szomszédos mezőben van, átszíneződik.
Ha a játék során bármikor több, mint $\frac{n}{2}$ piros korong van a táblán, a piros játékos azonnal nyer, míg ha bármikor legalább $\frac{n}{2}$ kék korong van, akkor a kék játékos azonnal nyer. Ha 200 lépésig egyik se következik be, akkor a kék játékos nyer.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Az n szám ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XV. Dürer Verseny szervezői