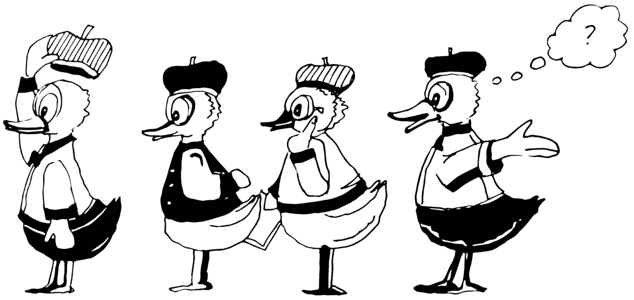


E+1. Legyen $c \geq 2$ egy rögzített egész szám. Legyen $a_1 = c$ és minden $n \geq 2$ esetén $a_n = c \cdot \varphi(a_{n-1})$. Mely c számok esetén lesz az (a_n) sorozat korlátos?
φ az Euler-féle fí-függvényt jelöli, tehát $\varphi(n)$ azon egészek száma az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazban, melyek relatív prímek n-hez.
Egy (x_n) sorozatot korlátosnak nevezünk, ha létezik olyan D konstans, hogy $|x_n| < D$ minden n pozitív egész szám esetén.
Imolay András, Matolcsi Dávid és Schweitzer Ádám feladata

1. Megoldás: Tegyük föl, hogy c osztható egy p páratlan prímmel, amire létezik egy q páratlan prím, ami osztja $p-1$-et. Ekkor $p|a_1 = c$ és minden $n \geq 2$-re $a_n = c\varphi(a_{n-1})$ osztható c-vel. Mivel minden $n \geq 2$-re $p|a_{n-1}$, ezért $p-1|a_n$, tehát $q|a_n$. Legyen v_n a 2 kitevője a_n-ben. Ekkor $n \geq 2$-re $a_n = 2^{v_n} p^s q^t r$, ahol $s, t \geq 1$ és r relatív prím 2-vel, p-vel és q-val. Így $\varphi(a_n) = 2^{v_n - 1}(p-1)p^{s-1}(q-1)q^{t-1}\varphi(r)$, ami osztható 2^{v_n+1}-gyel, mivel $p-1$ és $q-1$ is osztható 2-vel. Azaz $v_{n+1} \geq v_n + 1$. Tehát a 2 kitevője folyamatosan növekszik, vagyis a sorozat nem lehet korlátos.

Ha c osztható egy olyan páratlan prímmel, amire $p-1$ osztható 4-gyel, akkor mivel minden $n \geq 1$-re $p|a_n$, ezért $a_n = 2^{v_n} p^s r$, ahol $s \geq 1$ és r relatív prím 2-vel és p-vel, ekkor $\varphi(a_n) = 2^{v_n-1}(p-1)p^{s-1}\varphi(r)$, ami osztható 2^{v_n+1}-gyel, mivel $4|p-1$. A sorozat ekkor sem lehet korlátos.

Ha $4|c$, akkor $a_n = 2^{v_n} r$, ahol r páratlan, ekkor $\varphi(a_n) = 2^{v_n-1}\varphi(r)$ és $a_{n+1} = c\varphi(a_n)$ osztható 2^{v_n+1}-gyel, mivel $4|c$. A sorozat ekkor sem lehet korlátos.

Ha $2|c$ és egy p páratlan prím is osztja c-t, akkor $a_n = 2^{v_n} p^s r$ és $a_{n+1} = c2^{v_n-1}(p-1)p^{s-1}\varphi(r)$, ami osztható 2^{v_n+1}-gyel, mivel $2|p-1$ és $2|c$.

Tehát három lehetőség maradt: $2|c$, de 4-gyel nem osztható c, és egyetlen páratlan prím sem osztja c-t, azaz $c = 2$. Vagy 2 nem osztja c-t, és csak olyan p páratlan prím osztja c-t, amire $p-1$-nek nincs páratlan prímosztója, és a 4 sem osztja $p-1$-et. Ez csak úgy lehet, ha $p-1 = 2$, azaz $p = 3$.

Ha $9|c$, akkor $a_n = 3^{w_n} r$, ahol r relatív prím a 3-hoz, és $a_{n+1} = c\varphi(a_n) = c \cdot 2 \cdot 3^{w_n-1}\varphi(r)$, ami osztható 3^{w_n+1}-gyel, mivel $9|c$. Ekkor a sorozatban a 3 kitevője folyamatosan növekszik, így nem lehet korlátos.

Tehát csak azok a lehetőségek maradtak, hogy $c = 2$ vagy $c = 3$. Ezek valóban jó megoldások: $c = 2$ esetén minden $a_n = 2$, mivel $2\varphi(2) = 2$, míg $c = 3$ esetén $a_1 = 3$ és minden $n \geq 2$-re $a_n = 6$, mivel $3\varphi(3) = 6$ és $3\varphi(6) = 6$.

2. Megoldás: A $c = 2, 3$ esetet az előző megoldáshoz hasonlóan oldjuk meg.

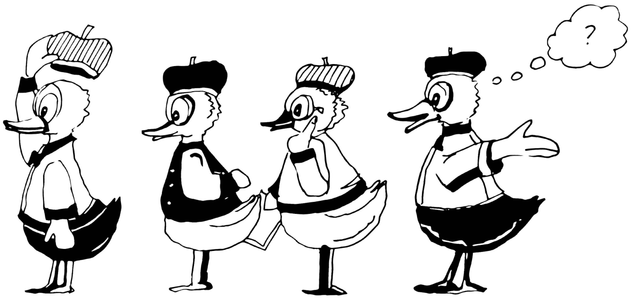
Legyen $c \geq 4$. Először belátjuk, hogy a_n-nek minden prímosztója legfeljebb c. Indukcióval bizonyítunk, $n = 1$-re az állítás triviális.

Ismert, hogy $\varphi(x) = x \prod\limits_{p_i|x} \frac{p_i - 1}{p_i}$, amiből könnyen látható, hogy $\varphi(x)$ prímosztói legfeljebb akkorák, mint x prímosztói. Tegyük fel, hogy n-re már beláttuk az állítást, vagyis a_n minden prímosztója legfeljebb c. Ekkor $a_{n+1} = c \cdot \varphi(a_n)$, és azt tudjuk, hogy $\varphi(a_n)$ minden prímosztója legfeljebb akkora, mint a_n prímosztói, amik pedig indukció miatt legfeljebb akkorák, mint c prímosztói, vagyis a_{n+1} prímosztói szintén legfeljebb akkorák, mint c prímosztói. Tekintsük a következő kifejezést:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c \cdot \varphi(a_n)}{a_n} \geq c \cdot \prod_{\substack{q \text{ prím} \\ q \leq c}} \frac{q-1}{q} \geq c \cdot \frac{4}{3} \prod_{2 \leq k \leq c} \frac{k-1}{k} = \frac{4}{3},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség azért teljesül, mert $c \geq 4$, így a jobb oldali produktumban szerepel a $\frac{3}{4}$, míg a bal oldaliban nem. Innen indukcióval $a_{n+1} \geq c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, azaz nem korlátos.

3. Megoldás: Könnyen látható a $\varphi(x) = x \prod\limits_{p_i|x} \frac{p_i - 1}{p_i}$ képlet felhasználásával, hogy ha $a|b$, valamely a, b pozitív egészekre, akkor $\varphi(a)|\varphi(b)$. Most legyen a_n és b_n az a két sorozat, melyet a feladatban leírt módon kapunk a $c = a_1$ és $c = b_1$ konstansokkal, ahol $a_1|b_1$. Ekkor indukcióval belátjuk, hogy $a_n|b_n$ minden n-re. $n = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $a_n|b_n$, ekkor $\varphi(a_n)|\varphi(b_n)$, vagyis $a_{n+1} =$



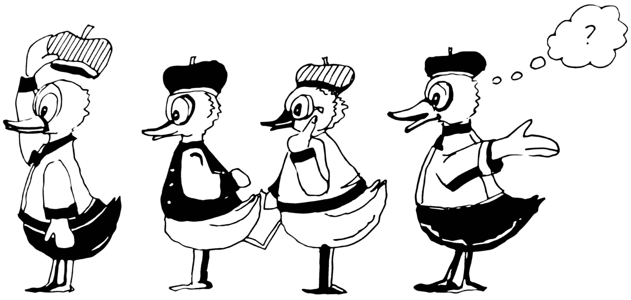
$a_1 \cdot \varphi(a_n) | b_1 \cdot \varphi(b_n) = b_{n+1}$. Tehát elég $p \geq 5$ prímekre, valamint $p = 4, 6, 9$ esetén belátni az állítást, hiszen ha p-re a sorozat nem korlátos, akkor az előzőek alapján $p \cdot k$-ra sem az, és minden $n > 3$ számot oszt valamilyen p a fentiek közül. Vagyis elég belátni a következő lemmát:

Lemma: Minden $p \geq 5$ prímre és $p = 4, 6, 9$-re a sorozat nem korlátos.

Bizonyítás: A $p = 4, 6, 9$ esetre az állítás leellenőrzését nem részletezzük, egyszerű végignézni. Legyen tehát $p \geq 5$ adott prím, és tegyük fel, hogy az állítást minden p-nél kisebb, a lemmában szereplő értékre igazoltuk. Vegyük észre, hogy ekkor a p-nél kisebb összes összetett számra is beláttuk hogy a sorozat nem korlátos. Belátjuk, hogy ha a_n jelöli azt a sorozatot, amit $p = c$-vel kapunk, és b_n azt, amelyet $p - 1 = c$-vel, akkor $a_n = p \cdot b_{n-1}$ minden $n \geq 2$ egészre. Indukcióval bizonyítunk:

$$a_2 = p\varphi(p) = p \cdot (p-1) = p \cdot b_1$$

Ezután belátjuk, hogy b_n minden prímosztója kisebb, mint p minden n-re. Könnyen igazolható a $\varphi(x) = x \prod\limits_{p_i | x} \frac{p_i - 1}{p_i}$ képlet segítségével, hogy $\varphi(x)$ minden prímosztója nem nagyobb, mint x legnagyobb prímosztója. Így ha feltesszük, hogy b_{n-1} minden prímosztója kisebb mint p, akkor a fenti állítás miatt $\varphi(b_{n-1})$ minden prímosztója kisebb mint p, vagyis $b_n = (p-1) \cdot \varphi(b_{n-1})$ minden prímosztója is kisebb mint p. Folytatjuk a lemma bizonyítását. Tegyük fel, hogy $a_n = p \cdot b_{n-1}$. Ekkor $a_{n+1} = p \cdot \varphi(p \cdot b_{n-1})$, de a fentiekben beláttuk, hogy p és b_{n-1} relatív prímek, így a φ függvény multiplitikativitását használva $\varphi(p \cdot b_{n-1}) = \varphi(p)\varphi(b_{n-1}) = (p-1)\varphi(b_{n-1}) = b_n$. Tehát tényleg $a_n = p \cdot b_{n-1}$ minden n-re. Mivel a feltétel szerint $p - 1$-re már beláttuk az állítást, így b_n nem korlátos, következésképp a_n sem, ezzel a lemmát és egyben a feladat állítását is beláttuk.



E+2. Anna rajzolt egy téglalapot, melyet vízszintes és függőleges vonalak segítségével felosztott n sorra és k oszlopra. Anna tudja a keletkező $n \cdot k$ darab kis téglalap területét, míg Balázs nem tudja. Anna elárulta Balázsnak ezen kis téglalapok közül néhánynak a területét. Adott n és k esetén határozzátok meg, hogy legalább hány kis téglalap területét adta meg Anna, ha a megadott információkból Balázs meg tudja határozni mind az $n \cdot k$ darab kis téglalap területét.
Például $n = 3$ és $k = 4$ esetén az ábrán látható 10 kis téglalap területének megadása elegendő a maradék két kis téglalap területének meghatározásához.

30	35	25	
48	56	40	72
42		35	63

Imolay András feladata

Megoldás: $n + k - 1$.

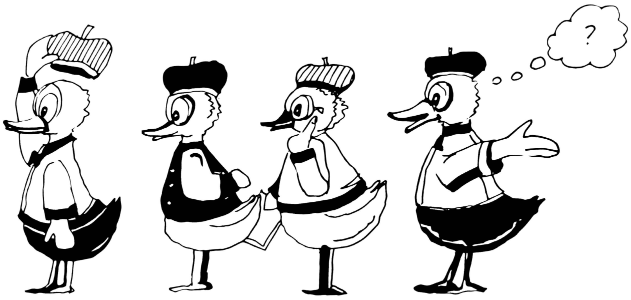
Vegyük észre, hogy ha két sor és két oszlop által meghatározott négy kis téglalapból háromnak meg van adva a területe, akkor a negyediknek is meg tudjuk határozni. Ennek a bizonyításához legyen a két sor magassága a és b, a választott oszlopok szélessége c és d. Adott ac, ad és bc, ekkor $bd = \frac{ad \cdot bc}{ac}$, így tényleg tudjuk a negyedik téglalap területét is.

Felső becslés: Adjuk meg az első sor és első oszlopban lévő összes kis téglalap területét. Ez tényleg $n + k - 1$ kis téglalap, és ha $l, m \geq 2$ akkor az l. sor és m. oszlopban lévő kis téglalap területét is meg tudjuk határozni, mivel az 1. és l. sor illetve az 1. és m. oszlop által meghatározott négy kis téglalapból háromnak tudjuk a területét.

Alsó becslés: Mutatunk egy gondolatmenetet az alsó becslésre. Tekintsük azt a páros gráfot, aminek $n+k$ csúcsa van, a csúcsok az oszlopokhoz és a sorokhoz tartoznak, és akkor van összekötve az l. sorhoz és az m. oszlophoz tartozó csúcs, ha az l. sor és m. oszlopban lévő téglalap területe meg van adva. Tegyük fel, hogy kevesebb, mint $n+k-1$ megadott téglalappal meg lehet oldani. Ekkor a gráfban kevesebb, mint $n + k - 1$ él van behúzva, azaz nem összefüggő a gráf. Ez azt jelenti, hogy a sorokat lehet partícionálni A és B részekre (A és B a sorok nemüres részhalmazait jelölik), és az oszlopokat C és D nemüres részekre úgy, hogy csak az A és C illetve a B és D által meghatározott téglalapok között vannak olyan téglalapok, amiknek meg van adva a területe. Ekkor az A-ban lévő sorok magasságát növeljük kétszeresére, a C-ben lévő oszlopok szélességét csökkentsük a felére. Így egyik megadott terület sem változik, ám egy téglalap, amit egy A-beli sor és egy D-beli oszlop határoz meg, annak a területe a kétszeresére nő, tehát nem tudja Balázs egyértelműen meghatározni a kimaradó területeket.

2. Megoldás: Az alsó becslésre mutatunk egy másik indoklást, ami nehéz, egyetemi módszereket alkalmaz. Figyeljük meg, hogy az első oszlop szélességét elárulhatjuk, hogy 1, mivel ha alapból a lenne, akkor az oszlopok szélességét a-val osztjuk, a sorok magasságát a-val szorozzuk. Ekkor könnyű látni, hogy Balázs pontosan akkor tudja meghatározni az összes területet, ha az összes sor magasságát és oszlop szélességét meg tudja határozni.

Egy téglalap területének megadása azt jelenti, hogy megadjuk $a \cdot b$ értékét, ahol a a sor magassága, b az oszlop szélessége. Tekintsük mindennek a logaritmusát. Ekkor $\log a + \log b$ van megadva. Összesen $n+k-1$ ismeretlen van, így kell legalább ennyi lineáris egyenlet, hogy meg tudjuk határozni az összeset, ezzel az alsó becslést bizonyítottuk.



E+3. Legyenek x, y, z pozitív valós számok, melyekre $x+y+z=1$, valamint $x > yz$, $y > zx$ és $z > xy$. Bizonyítsátok be, hogy

$$\left(\frac{x-yz}{x+yz}\right)^2 + \left(\frac{y-zx}{y+zx}\right)^2 + \left(\frac{z-xy}{z+xy}\right)^2 < 1.$$

Weisz Máté feladata

1. Megoldás: Legyenek egy háromszög oldalai $a = y+z$, $b = z+x$ és $c = x+y$, ekkor a koszinusz-tétel alapján

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2x^2+2xy+2xz-2yz}{2(x+y)(x+z)} = \frac{x(x+y+z)-yz}{x(x+y+z)+yz} = \frac{x-yz}{x+yz}.$$

Hasonlóan a bizonyítandó egyenlőtlenségben megjelenő másik két törtet kapjuk a háromszög másik két belső szögének koszinuszaként.

A generált háromszög hegyesszögű, mivel

$$z > xy \implies 2xz+2yz+2z^2 = 2z(x+y+z) > 2xy \implies a^2+b^2 > c^2,$$

és hasonlóan $a^2+c^2 > b^2$ és $b^2+c^2 > a^2$. A hegyesszögű háromszögekre felírható

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) < 1$$

ismert egyenlőtlenséget felhasználva adódik a bizonyítandó állítás.

A bizonyítás teljessége érdekében adunk egy indoklást az ismert egyenlőtlenségre:

$$\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos^2\gamma = \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta =$$

$$= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$$

Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy a bizonyítandó állítás

$$0 < 2\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = -2\cos(\alpha+\beta),$$

ami pedig igaz, mivel a háromszög hegyesszögű.

2. Megoldás: (Vázlat) Az előző megoldás jelöléseit használva az egyenlőtlenség felírható az a, b, c betűkkel, legyen $A = a^2$, $B = b^2$ és $C = c^2$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(B+C-A)^2}{4BC} < 1.$$

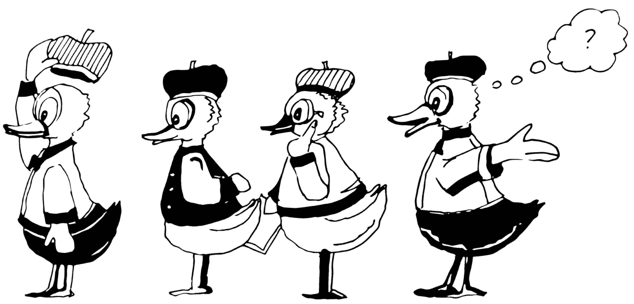
Felszorozva, egy oldalra rendezve, egyszerűsítve, majd szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy

$$0 < (A+B-C)(A+C-B)(B+C-A).$$

Ez pedig igaz, mivel az $A = a^2$, $B = b^2$, $C = c^2$ számokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, ahogy azt az előző megoldásban láttuk.

3. Megoldás: A bal oldalt átalakítva az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$1 - \frac{4xyz}{(x+yz)^2} + 1 - \frac{4xyz}{(y+zx)^2} + 1 - \frac{4xyz}{(z+xy)^2} < 1.$$



Átrendezve és 2-vel osztva a következő, a feladat állításával ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk el:

$$1 < 2xyz\left(\frac{1}{(x+yz)^2}+\frac{1}{(y+zx)^2}+\frac{1}{(z+xy)^2}\right).$$

Mivel $x+y+z=1$, így $x+yz=x(x+y+z)+yz=(x+y)(x+z)=(1-z)(1-y)$. Hasonlóan $y+zx=(1-x)(1-z)$ és $z+xy=(1-y)(1-x)$. Ebből

$$\left(\frac{1}{(x+yz)^2}+\frac{1}{(y+zx)^2}+\frac{1}{(z+xy)^2}\right)=\left(\frac{1}{(1-y)^2(1-z)^2}+\frac{1}{(1-z)^2(1-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2(1-y)^2}\right)=$$

$$=\frac{(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2}{(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2}=\frac{1+x^2+y^2+z^2}{(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2},$$

utóbbinál ismét használtuk az $x+y+z=1$ feltételt. Így

$$2xyz\left(\frac{1}{(x+yz)^2}+\frac{1}{(y+zx)^2}+\frac{1}{(z+xy)^2}\right)=2xyz\left(\frac{1+x^2+y^2+z^2}{(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2}\right).$$

Tehát a feladat állítása ekvivalens az alábbi egyenlőtlenséggel:

$$1 < 2xyz\left(\frac{1+x^2+y^2+z^2}{(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2}\right).$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $\big((1-x)(1-y)(1-z)\big)^2 < 2xyz(1+x^2+y^2+z^2)$.

$$((1-x)(1-y)(1-z))^2=(1-x-y-z+xy+yz+zx-xyz)^2=(xy+yz+zx-xyz)^2=$$

$$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2-2x^2y^2z-2x^2yz^2-2xy^2z^2$$

az $x+y+z=1$ feltételből. Így a feladat állítása pontosan akkor teljesül, ha

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2-2x^2y^2z-2x^2yz^2-2xy^2z^2 < 2xyz(1+x^2+y^2+z^2),$$

rendezve $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2+2xyz(x+y+z) < 2xyz(1+x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$.

$$2xyz(1+x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)=xyz(2+x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^2)=$$
$$=xyz(2+x^2+y^2+z^2+1^2)=xyz(3+x^2+y^2+z^2).$$

Eszerint a feladat állítása ekvivalens az

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2+2xyz(x+y+z) < xyz(3+x^2+y^2+z^2)$$

és

$$0 < 3xyz+xyz(x^2+y^2+z^2)-2xyz(x+y+z)-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2-x^2y^2z^2$$

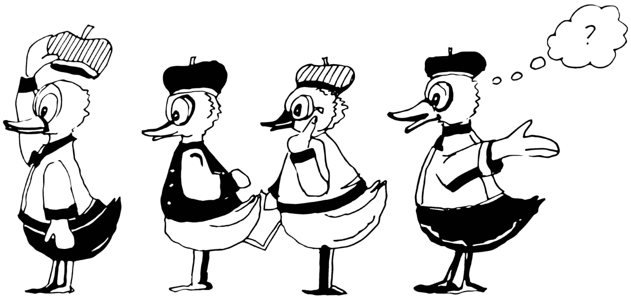
egyenlőtlenségekkel. Rendezve, közben ismét alkalmazva $x+y+z=1$-et:

$$3xyz+xyz(x^2+y^2+z^2)-2xyz(x+y+z)-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2-x^2y^2z^2=$$

$$=xyz(3-2(x+y+z))+xyz(x^2+y^2+z^2)-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2-x^2y^2z^2=$$

$$xyz+xyz(x^2+y^2+z^2)-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2-x^2y^2z^2=(x-yz)(y-zx)(z-xy),$$

ami a feladat $x>yz$, $y>zx$, $z>xy$ feltételeiből nagyobb 0-nál. Ez ekvivalens a feladat állításával, ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

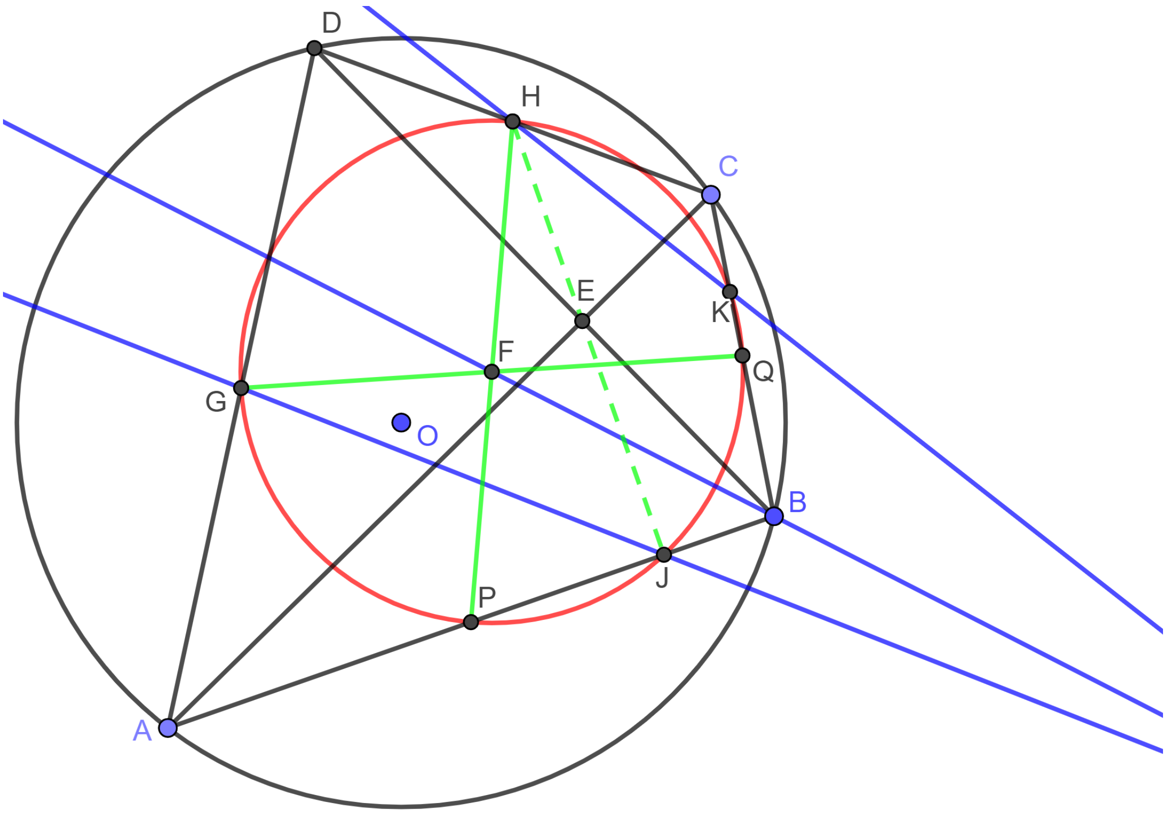


E+4. Legyen $ABCD$ olyan húrnégyszög, melynek az átlói merőlegesek. Jelölje az $ABCD$ négyszög körülírt körének középpontját O, az átlók metszéspontját E, továbbá az E pont merőleges vetületét az AB és BC oldalakon rendre J és K. Legyen F, G és H rendre az OE, AD és DC szakaszok felezőpontja. Mutassátok meg, hogy a GJ, FB és HK egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.
Weisz Máté feladata

Megoldás: Legyenek P és Q rendre az AB és BC oldalak felezőpontjai.

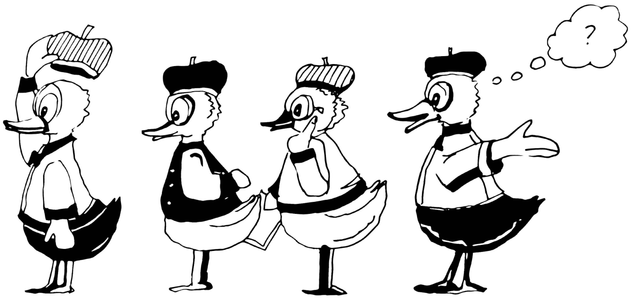
$$HEC\sphericalangle = HCE\sphericalangle = DBA\sphericalangle = AEJ\sphericalangle,$$

így H, E és J kollineárisak. Hasonlóan G, E és K is azok. HG és QP párhozamos AC-vel, míg QH és GP párhuzamos BD-vel, így $GPQH$ téglalap, azaz a csúcsai illeszkednek egy k körre. Továbbá H, E és J kolinearitása miatt $HJP\sphericalangle$ derékszög, így J is rajta van a k körön. Ugyanígy a K pont is a k körön van.



A fenti állítás alapján HE merőleges AB-re és OP is merőleges AB-re, ugyanígy PE merőleges CD-re és OH is merőleges CD-re, így $OHEP$ paralelogramma. Ugyanígy $OGEQ$ is paralelogramma, tehát F a HP és GQ szakaszoknak is a felezőpontja.

Alkalmazzuk a Pascal-tételt a G, J, P, H, K, Q pontokra, hogy megkapjuk, hogy X, B és F egy egyenesre illeszkednek, ezzel bebizonyítottuk az állítást.



E+5. Egy kerek asztal körül n ember ül, kezdetben mindenki leír egy egész számot a papírjára. Innentől kezdve percenként, egyszerre mindenki leírja a lapjára azt a számot, amit úgy kap, hogy a saját számából kivonja a tőle jobbra ülő számát, majd a régi számot letörli. Határozzátok meg azokat az n számokat, melyekhez létezik olyan k egész szám, hogy bármilyen számokat is választottak az emberek eredetileg, k perc után mindenki előtt n-nel osztható szám fog állni.
Beke Csongor feladata

Megoldás: Azt állítjuk, hogy pontosan a prímhatványok esetén létezik megfelelő k szám. Legyenek kezdetben a számok sorban $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Az indexelést mindig modulo n értjük. Teljes indukcióból világos, hogy az első ember papírján k perc után az

$$A_k = \sum_{0 \le i \le k} (-1)^i \binom{k}{i} a_{i+1}$$

szám van. Először igazolunk egy lemmát.

Lemma Ha p prím, akkor $\binom{p^l}{a} \equiv 0 \pmod{p}$ ha $0 < a < p^l$.

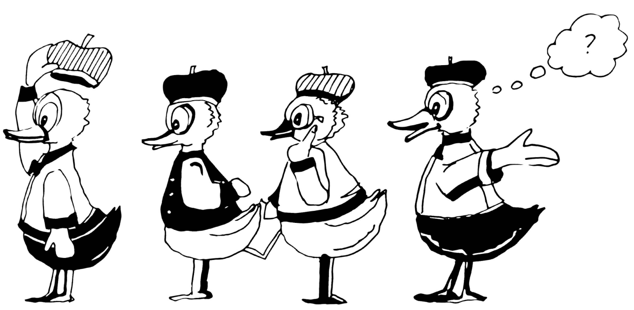
Bizonyítás Használjuk Lucas-tételét, ami kimondja, hogy $\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p}$, ahol $m = m_k p^k + \cdots + m_1 p + m_0$, $n = n_k p^k + \cdots + n_1 p + n_0$ a p-alapú számrendszerben vett felírásuk. Ha $0 < a < p^l$, akkor a utolsó l számjegye között lesz nem 0, ezért a szorzat egyik tagja $\binom{0}{a_i} = 0$, azaz p-vel osztható $\binom{p^l}{a}$, ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. (Egyébként a lemma a tétel nélkül is viszonylag egyszerűen igazolható).

Térjünk rá a feladatra, vizsgáljuk meg az eseteket:

- Ha $n = 1$, akkor $k = 1$ működik.
- Ha $n = p^l$ valamilyen $l \in \mathbb{N}$-re, akkor a Lemmát használva $A_n \equiv a_1 + (-1)^{p^l} a_1 \equiv 0 \pmod{p}$, hiszen ha p páratlan, akkor $(-1)^{p^l} = -1$, ha pedig $p = 2$, akkor $1 + (-1)^{p^l} = 2 \equiv 0 \pmod{2}$. Tehát n perc után az első játékos előtt, és ugyanígy mindenki más előtt is p-vel osztható szám áll. Innen látható indukcióval, hogy tn lépés után mindenki előtt p^t-vel osztható szám áll, így $k = ln$ megfelelő választás.
- Ha n-nek van 2 különböző prímosztója, p és q, akkor nézzük a papírokon szereplő számokat p^l lépés után, ahol $l \in \mathbb{N}$. A Lemmából azt kapjuk, hogy

  $$A_{p^l} \equiv a_1 + (-1)^{p^l} a_{p^l+1} \pmod{p}.$$

  Tegyük fel, hogy a kiinduló számok az $a_1 = 1$ és minden más 0. Mivel n nem prímhatvány, így $n \nmid p^l$, azaz $a_{p^l+1} = 0$, tehát $A_{p^l} \equiv 1 \pmod{p}$, azaz $n \nmid A_{p^l}$. Ezt tetszőleges l természetes számra el lehet mondani, így nem lesz megfelelő k. Ezzel a bizonyítást befejeztük.



E+6. **Játék:** Adott $n \leq 25$ mező egy sorban, kezdetben a bal szélső mezőbe egy piros, a jobb szélső mezőbe pedig egy kék korongot helyezünk. A kezdő játékos a piros, a másik a kék korongokkal van. Egy lépés során a soron következő játékos háromféle lehetőség közül választ:

- Egy saját színű korongot egy vagy kettő mezővel odébb helyez egy üres mezőbe (ezzel akár át is lehet ugrani másik korongot).
- Rak egy saját színű korongot egy olyan üres mezőbe, ami szomszédos egy mezővel, amiben a saját korongja van.
- Passzol, azaz nem csinál semmit.

Bármelyik lépés után, amikor egy üres mezőbe belekerül egy korong, akkor az összes ezzel a színnel ellentétes színű korong, ami ezzel szomszédos mezőben van, átszíneződik.

Ha a játék során bármikor több, mint $\frac{n}{2}$ piros korong van a táblán, a piros játékos azonnal nyer, míg ha bármikor legalább $\frac{n}{2}$ kék korong van, akkor a kék játékos azonnal nyer. Ha 200 lépésig egyik se következik be, akkor a kék játékos nyer.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Az n szám ismeretében ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Váli Benedek feladata

Megoldás: Vizsgáljuk meg a játékot először kis n-re. $n = 1$ esetén a bal és szélső mezők ugyanazok, a játéknak nincs értelme. $n = 2$ esetén a kék játékos azonnal nyert a kezdőállásban. $n = 3$ és 4 esetén a piros játékos a kezdőkorongjának mozgatásával a kék játékos korongját át tudja színezni, így könnyen nyer.

$n = 5$ esetén ha valamelyik játékos úgy dönt, hogy passzolás helyett áthelyezi a korongját, vagy új korongot rak le, a másik játékos a saját korongját áthelyezve könnyen nyer. Így az első játékosnak mindig passzolnia éri meg, és a második játékos erre passzolásokkal válaszolva nyer.

Innen kezdve általános $n \geq 6$-tal dolgozunk. Nevezzükel a tábla középső (vagy páros n esetén a középső kettő közül a jobb oldali) mezőjét a kritikus mezőnek.

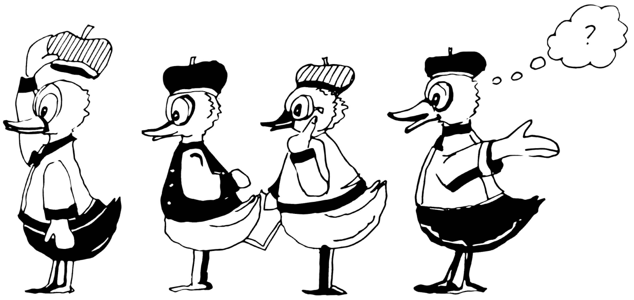
Először is vegyük észre, hogy a legjobbrább lévő piros korong mindig balrább lesz mint a legbalrább lévő kék korong. Ha nem így lenne, akkor lenne egy olyan lépés a játék folyamán, amikor először olyan állás alakul ki, viszont az könnyen meggondolható, hogy az a lépés nem lehetett egyik fajta sem, tehát ellentmondásra jutunk.

Nevezzük azon állásokat kritikusnak, amikor az egyik játékosnak a kritikus mezőtől 2 illetve 3 távolságra lévő mezőkön vannak korongjai úgy, hogy a másik játékosnak nincsenek ilyen távolságokra korongjai a kritikus mezőtől (és közelebb se). Azt állítjuk, hogy amelyik játékos el tud érni számára egy kritikus állást, annak a játékosnak van nyerő stratégiája. Nevezzük ezt a játékost X játékosnak. X játékos tehát az a játékos, aki garantálni tudja, hogy hamarabb legyenek a kritikus mezőtől 2 illetve 3 távolságra korongjai, mint az ellenfelének.

A pálya szimmetriája miatt páratlan n-re a piros játékos lesz X. Páros n esetén pedig két részeset van: $n = 4k$ esetén mivel a piros játékosnak legalább k lépésre van szüksége, hogy legyenek korongjai 2 ill. 3 távolságra a kritikus mezőtől, a kék játékosnak pedig csak $k - 1$, így a kék lesz X, $n = 4k + 2$ esetén pedig a kéknek is k darab lépés kell, így a piros lesz X. Páratlan n-ekre ez a következőképp alakul: $n = 4k + 1$ és $n = 4k + 3$ esetén is mindkét játékosnak k darab lépésre van szüksége hogy elérje a fentebbi állást.

X nyerő stratégiája a következő: A kezdőállásból a lehető legkevesebb lépéssel érjen el kritikus állást számára, majd az alábbi stratégia szerint folytassa a játékot:

1. eset: Amennyiben az ellenfele a következő lépésben korongot helyez a kritikus mezőre: X rak egy új, saját színű korongot a kritikus mezőtől 1 távolságra lévő, saját korongjával szomszédos mezőre. Így az ellenfél egyetlen korongja átszíneződik, és X így könnyen nyer. Az ellenfélnek azért csak egyetlen korongja lehet, mert feltettük hogy X a lehető legkevesebb lépésből eléri a kritikus állást, ami k vagy $k - 1$ n négyes maradéka szerint.



2. eset: Amennyiben ellenfele a következő lépésben nem ugrik be a kritikus mezőre. Ekkor X a következő lépésében áthelyezi a kritikus mezőtől kettő távolságra lévő korongját a kritikus mezőre. Amennyiben az ellenfél játékos valamely következő lépésével átszínezné a kritikus mezőn álló korongot, úgy X a kritikus mezőtől három távolságra lévő korongját a kritikus mező mellé áthelyezve azt vissza tudja színezni. Amennyiben az ellenfél játékos nem színezte át a kritikus mezőn álló korongot, X amennyiben tud, a kezdő mezőjétől legtávolabbi korongja melletti, az ellenfele kezdőmezője felé lévő szomszédos mezőre helyez le egy új korongot, vagy amennyiben ez nem lehetséges, mert már tartalmaz korongot, akkor "feltölti" a kritikus mezőtől a saját kezdőmezője felé lévő üres mezőket. Ezt a megfelelő sorrendben téve (nem a kritikus mező melletti mezőt először feltöltve) X könnyen megnyeri a játékot.

A fentebb leírt stratégia alapján $n \geq 6$-ra a piros játékosnak van nyerő stratégiája amennyiben $4 \mid n$, különben pedig a kék játékosnak van nyerő stratégiája. A stratégia kizárja, hogy egy játék $n \geq 6$ esetén kétszáz lépésig tartson, így mindig vagy a piros játékos fogja elérni hogy legyen több mint $\frac{n}{2}$ korongja a pályán, vagy a kék hogy legyen legalább $\frac{n}{2}$.