1. Feladat

(a)

I. Tekintsük át részletesen a ferde hajítás esetét!

1.) Egy v_0 nagyságú, vízszintessel α szöget bezáró kezdősebességű ferde hajításra felírható egyenletek:

$$d = v_0 \cos\alpha \; t_{\text{teljes}} \; , \qquad h = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \; , \qquad v_0 \sin\alpha - g \; \frac{t_{\text{teljes}}}{2} = 0 \; ,$$

ahol t_{teljes} az indítás és földetérés között eltelt idő. Ezek alapján felírható a

$$d = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

összefüggés, valamint ezt felhasználva:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{4h}{d} \; .$$

A megadott adatokat behelyettesítve a kérdéses szög kiszámítható:

$$\boxed{\alpha = 11,3\ ^\circ} \; .$$

2.) A hajítás kezdősebességének vízszintes és függőleges komponensei:

$$v_{0y} = \sqrt{2gh} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \; ,$$

$$v_{0x} = \frac{v_{0y}}{\text{tg}\ \alpha} = \sqrt{\frac{gd^2}{8h}} = 50\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \; .$$

3.) A kérdéses kezdősebesség:

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \; ,$$

az adatokat behelyettesítve:

$$\boxed{v_0 \approx 50,99\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} \; .$$

(b)

I. Írjuk fel a kocsira a dinamika alapegyenletét a tetőponton:

$$mg - N_{\text{t}} = ma_{\text{cp}} = m\frac{v^2}{R_{\text{t}}} \; .$$

Ebből a nyomóerő kifejezhető:

$$N_t = m\left(g - \frac{v^2}{R_t}\right) . \tag{1.1}$$

II. A fenti egyenletben a kérdéses nyomóerőn kívül a pálya R_t görbületi sugara az ismeretlen. Ha találnánk egy mozgást, melynek pályája a hídéval megegyező paraméterű parabolával írható le, és ismernénk az ilyen mozgást végző test sebességét, valamint gyorsulását a pálya vizsgált pontjában, ebből kiszámíthatnánk a hiányzó görbületi sugarat. Az (a) feladatrészben meghatározott ferde hajítás éppen megfelelő, a továbbiakban dolgozzunk ezzel az analógiával!

1.) A görbületi sugár meghatározásához használjuk fel, hogy a pálya tetőpontján a testnek csak vízszintes sebességkomponense van, illetve a sugárirányú gyorsulás éppen g:

$$R_t = \frac{v_{0x}^2}{g} = \frac{d^2}{8h} . \tag{1.2}$$

2.) A keresett nyomóerő a tetőponton (1.1) és (1.2) alapján:

$$N_t = mg - \frac{8mv^2h}{d^2} ,$$

így a megadott adatokat behelyettesítve:

$$\boxed{N_t = 8400 \text{ N}} .$$

(c)

I. Írjuk fel a testre a dinamika alapegyenletét a két part közötti szakasz kétharmad részében! Ehhez felhasználhatjuk a 1.1. ábrát, amely a kocsira ható erőket szemlélteti:

$$mg\cos\varphi - N_{2/3} = m\frac{v^2}{R_{2/3}} .$$

Némi átrendezéssel:

$$N_{2/3} = m\left(g\cos\varphi - \frac{v^2}{R_{2/3}}\right) . \tag{1.3}$$

1.1. ábra. A kocsira sugáriranyban ható erők.

II. A görbületi sugár meghatározásához felhasználhatjuk az eddigiekben alkalmazott ferde hajítást, hiszen a pálya nem változott.

1.) A két part közötti szakasz kétharmad részének eléréséig eltelt idő:

$$t_{2/3} = \frac{2}{3}\, t_{\text{teljes}} = \frac{2}{3}\frac{d}{v_{0x}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{8h}{g}}\ .$$

2.) Ebben a pontban a test sebességkomponensei:

$$v_y = v_{0y} - g\ t_{2/3} = \sqrt{2gh} - \frac{2}{3}\ g\sqrt{\frac{8h}{g}} = -\frac{1}{3}\ \sqrt{2gh}\ ,$$

$$v_x = v_{0x} = \sqrt{\frac{g}{8h}}d\ .$$

3.) Végül a görbületi sugár kiszámításához használjuk fel, hogy a vizsgált pontban a test sugárirányú gyorsulása $a_n = g\cos\varphi$:

$$R_{2/3} = \frac{v_{2/3}^2}{g\cos\varphi}\ ,$$

továbbá, hogy a 1.2. ábra alapján:

$$\cos\varphi = \frac{v_x}{v_{2/3}}\ .$$

Mindezek felhasználásával:

$$R_{2/3} = \left(\frac{d^2}{8h} + \frac{2}{9}h\right)\sqrt{1 + \frac{16h^2}{9d^2}}\ . \tag{1.4}$$

1.2. ábra. A helyettesítő hajítás.

III. A kérdezett nyomóerő a partok közötti távolság 2/3 részében (1.3) és (1.4) alapján:

$$N_{2/3} = \frac{mgd}{\sqrt{d^2 + \frac{16}{9}h^2}} - \frac{8mv^2hd^2}{\left(d^2 + \frac{16}{9}h^2\right)^{3/2}}\ ,$$

a megadott adatokat behelyettesítve:

$$\boxed{N_{2/3} \approx 8388\ \text{N}}\ .$$

2. Feladat

A célbaérésünk teljes ideje (t_{teljes}) az utazási idő ($t_{\text{utazás}}$) és a töltési idő ($t_{\text{töltés}}$) összege:

$$t_{\text{teljes}} = t_{\text{utazás}} + t_{\text{töltés}} \ .$$

A v sebességű utazás ideje: $t_{\text{utazás}} = s/v$, tölteni pedig akkor kell, ha az utazás során felhasznált energia (W) nagyobb, mint az akkumulátor kapacitása (C). Amennyiben kell töltenünk, úgy a töltési idő f teljesítményű töltővel: $t_{\text{töltés}} = (W - C)/f$. Vegyük észre, hogy ha $C > W$, akkor nincs szükségünk töltésre, azaz $t_{\text{töltés}} = 0$. Ezt a két esetet az alábbi módon írhatjuk egybe: $t_{\text{töltés}} = \max\left[0, (W - C)/f\right]$. Már csak az utazás során felhasznált energiát kell meghatároznunk, ez következő alakban adódik:

$$W = t_{\text{utazás}} \cdot P(v) = \frac{s}{v}\left(a + b \cdot v + c \cdot v^2\right) = s \cdot \left(\frac{a}{v} + b + c \cdot v\right) \ .$$

Ekkor t_{teljes} képletében nem marad ismeretlen mennyiség, csak a megadott paraméterek:

$$t_{\text{teljes}} = t_{\text{utazás}} + t_{\text{töltés}} = \frac{s}{v} + \frac{\max\left[0, s \cdot \left(\frac{a}{v} + b + c \cdot v\right) - C\right]}{f} \ . \tag{2.1}$$

(a)

Hosszabb utazások esetén szükséges tölteni. Emiatt – és az egyszerűbb számolás érdekében – hagyjuk el a max()-ot a (2.1) egyenletből (ezt majd a (b) részben részletesen elemezzük):

$$t_{\text{teljes}} = \left(s + s\frac{a}{f}\right)\frac{1}{v} + \frac{sb - C}{f} + v\frac{sc}{f}$$

Egy $f(x) = p/x + qx$ alakú függvénynek a minimuma $x^* = \sqrt{p/q}$-nál van, amint azt a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségből megkaphatjuk. Ezt felhasználva az teljes idő minimuma $v^* = \sqrt{(f + a)/c}$-nél van. Behelyettesítve a paramétereket:

$$\boxed{v^* = 118\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} \ .$$

(b)

Az előző feladatrész alapján látható, hogy az optimális sebesség nem függ az út hosszától, feltéve, hogy meg kell állnunk tölteni. Viszont ha v^* sebességgel utazva töltés nélkül is célba érünk, sőt, marad energia az akkumulátorban, akkor választhattunk volna nagyobb sebességet a gyorsabb érkezéshez. Tehát a leggyorsabb megérkezéshez általánosan: menjünk a maximális sebeséggel, amivel töltés nélkül célba érünk, ha ez nem lehetséges, vagy ez a sebesség kisebb mint 118 km/h, akkor menjünk 118 km/h-val és töltsünk!

(c)

Gyors ellenőrzéssel láthatjuk, hogy 118 km/h sebeséggel a hatótávolság több mint 200 km:

$$v^* \cdot \frac{C}{P(v^*)} = 212 \text{ km} .$$

Ez alapján tehát keressük azt a legnagyobb sebességet, amellyel 200 km még töltés nélkül megtehető, azaz $C = W$. Ez a sebesség a (2.1) egyenlet és a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján adódik:

$$C = W = t_{\text{utazás}} \cdot P(v^*_{200}) = s \cdot \left(\frac{a}{v^*_{200}} + b + c \cdot v^*_{200} \right) ,$$

$$v^*_{200} = \frac{(C/s - b) \pm \sqrt{(C/s - b)^2 - 4ac}}{2c} .$$

A megadott adatokat behelyettesítve:

$$\boxed{v^*_{200} = 127 \text{ km/h}} . \tag{2.2}$$

3. Feladat

(a)

I. A vizsgált körfolyamat során a gáz által végzett hasznos munka nagysága éppen megegyezik a kapott $ABCD$ téglalap területével. Ezt felhasználva a feladat átfogalmazható: azt kell megmutatnunk, hogy a fenti feltételekkel kapott téglalap területe független a berajzolt egyenes meredekségétől!

II. Vegyünk fel egy origón átmenő egyenest, melynek meredeksége λ, ekkor az egyenes egyenlete:

$$p = \lambda V . \tag{3.1}$$

3.1. ábra. A körfolyamat.

A 3.1. ábra alapján:

$$p_1 = \lambda V_1 \ , \quad p_2 = \lambda V_2 \ ,$$

azaz a téglalap területe (3.1) felhasználásával:

$$W_\mathrm{h} = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = \lambda (V_2 - V_1)^2 \ . \tag{3.2}$$

III. Legyen a gáz anyagmennyisége n, ekkor az állapotegyenletet felírva:

$$p_1 V_1 = nRT_1 \ , \quad p_2 V_2 = nRT_2 \ .$$

A (3.1) egyenletet felhasználva a térfogatok a következő alakban írhatók:

$$V_1 = \sqrt{\frac{nRT_1}{\lambda}} \ , \quad V_2 = \sqrt{\frac{nRT_2}{\lambda}} \ .$$

IV. Ezeket beírva (3.2)-be és egyszerűsítve:

$$\boxed{W_\mathrm{h} = nR\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)^2} \ . \tag{3.3}$$

Azaz azt kaptuk, hogy a körfolyamatra jellemző hasznos munka valóban független a berajzolt egyenes meredekségétől!

(b)

I. A körfolyamat hatásfoka definíció szerint:

$$\eta = \frac{W_h}{Q_\mathrm{fel}} \ . \tag{3.4}$$

II. A hasznos munkát az előző feladatrészben már meghatároztuk, a továbbiakban célunk a gáz által felvett hő kiszámítása.

1.) Hőfelvétel az $A - B$, illetve $B - C$ részfolyamatok során történik. Az $A - B$ részfolyamat során a térfogat állandó, ez alapján a felvett hő:

$$Q_{AB} = c_v \ n \ (T_B - T_1) = \frac{f}{2} Rn \ (T_B - T_1) \ . \tag{3.5}$$

A $B - C$ részfolyamat során a nyomás állandó, azaz a felvett hő:

$$Q_{BC} = c_p \ n \ (T_2 - T_B) = \frac{f+2}{2} Rn \ (T_2 - T_B) \ . \tag{3.6}$$

2.) Ezután határozzuk meg a T_B hőmérsékletet. Ehhez írjuk fel ismét az állapotegyenletet:

$$p_2 V_2 = nRT_B \ . \tag{3.7}$$

Összeszorozva az A és C állapotokra felírt állapotegyenleteket, valamint felhasználva a (3.1) összefüggést:

$$p_2V_2 = nR\sqrt{T_1T_2}\ . \tag{3.8}$$

A (3.7) és (3.8) egyenleteket összevetve:

$$T_B = \sqrt{T_1T_2}\ . \tag{3.9}$$

3.) A (3.5), (3.6) és (3.9) egyenleteket felhasználva a felvett hő immár kiszámítható:

$$Q_{\text{fel}} = Q_1 + Q_2 = \frac{f}{2}Rn\ \left(\sqrt{T_1T_2} - T_1\right) + \frac{f+2}{2}Rn\ \left(T_2 - \sqrt{T_1T_2}\right)\ .$$

Átrendezve:

$$Q_{\text{fel}} = Rn\ \left(\frac{f}{2}(T_2 - T_1) + T_2 - \sqrt{T_1T_2}\right)\ . \tag{3.10}$$

IV. A körfolyamat hatásfoka (3.1), (3.3) és (3.10) alapján:

$$\eta = \frac{nR\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)^2}{Rn\ \left(f(T_2 - T_1)/2 + T_2 - \sqrt{T_1T_2}\right)}\ .$$

A szabadsági fokok számát ($f = 3$) behelyettesítve és egyszerűsítve:

$$\eta = \frac{2(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})}{5\sqrt{T_2} + 3\sqrt{T_1}}\ ,$$

azaz konkrétan:

$$\boxed{\eta = \frac{2}{37}}\ .$$

4. Feladat

I. Vezessük be az egyes feszültség, illetve áramerősség értékekre a 4.1. ábra paramétereit! Itt Kirchoff I. törvényét már implicit módon felhasználtuk.

4.1. ábra. A paraméteres áram- és feszültségértékek.

II. Határozzuk meg az áramkör áram-feszültség karakterisztikáját a Dürisztor két pólusa között, ehhez írjuk fel Kirchoff II. törvényét a 4.2. ábra szerint. Az 1-es hurokra:

$$I_0 R_b + U + R_1 I = U_0 \ , \tag{4.1}$$

a 2-es hurokra pedig:

$$I_0 R_b + R_2(I_0 - I) = U_0 \qquad \Longrightarrow \qquad I_0 = \frac{U_0 + R_2 I}{R_b + R_2} \ . \tag{4.2}$$

A (4.1) és (4.2) egyenleteket összefoglalva:

$$\frac{U_0 + R_2 I}{R_b + R_2} R_b + U + R_1 I = U_0 \ .$$

Ezt rendezve:

$$I = \frac{R_2 U_0}{R_1 R_2 + R_1 R_b + R_2 R_b} - \frac{R_2 + R_b}{R_1 R_2 + R_1 R_b + R_2 R_b} U \ ,$$

majd a megadott adatokat behelyettesítve:

$$I = 0,9 - 0,1\ U\ [\mathrm{A}] \ .$$

A kapott I(U) függvény tehát elsőfokú!

4.2. ábra. A két hurok vizsgálata.

III. Most rajzoljuk be a megadott grafikonba az előbb kapott egyenest a 4.3. ábrának megfelelően! Ha leolvassuk a két görbe metszéspontjának koordinátáit, éppen az áramkörbe épített Dürisztor feszültség és áramerősség értékét kapjuk. Leolvasva: $U_D = 0,5$ V, $I_D = 4$ A.

4.3. ábra. Az berajzolt egyenest tartalmazó grafikon.

IV. Végül a Dürisztor teljesítménye:

$$P_\mathrm{D} = U_\mathrm{D} I_\mathrm{D} \ ,$$

behelyettesítve:

$$\boxed{P_\mathrm{D} = 2 \text{ W}} \ .$$

5. Feladat

A sétáló ember ott lát világosabb foltokat, ahol két rés a szemszögéből éppen egymás mögött helyezkedik el. Nevezzük az egyik ilyet nulladik világos foltnak! Ehhez képest kicsit oldalra nézve az egyik kerítés rését a másik kerítés oszlopa fogja takarni, így sötétebb (átlátszatlan) folt jelenik meg.

5.1. ábra. Az elrendezés geometriája.

Tovább fordulva ismét világos folt látható, azaz a gyalogos szeme ismét rajta van két rés egyenesén. Ez úgy lehetséges, hogy a közelebbi kerítés k-adik és a távolabbi kerítés $k+1$-edik[1] résén nézünk keresztül (a nulladik világos folttól számolva). Ez látható a 5.1. ábrán, ahol a fénysugarakat vörös vonalak jelölik. A látott minta periódusának h hosszát k segítségével kifejezhetjük:

$$h = k \cdot d \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{h}{d}\,, \tag{5.1}$$

ahol $d = d_{\text{rés}} + d_{\text{oszlop}}$. A két fényes folt irányába húzott egyenesek és a kerítések két hasonló háromszöget alkotnak. A kisebb háromszög magassága a közelebbi korlát távolsága (s), a nagyobbé a távolabbi korlát távolsága ($s+x$). Hasonló háromszögek miatt felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{s}{k \cdot d} = \frac{s+x}{(k+1) \cdot d}\,. \tag{5.2}$$

A (5.1) és (5.2) egyenletek alapján, a megadott adatokat behelyettesítve adódik a gyalogos átjáró szélessége:

$$\boxed{x = \frac{ds}{h} = 5\ \text{m}}\,.$$

[1] A távolabbi kerítés tetszőleges $k+q$-adik résének átfedése is világos foltot eredményez. Ennek az átfedésnek az eredeti iránnyal bezárt α szöge: $tg(\alpha) = q/x$, kicsi α-ra. Ebből látszik, hogy $q = 1$ adja az első világos foltot.