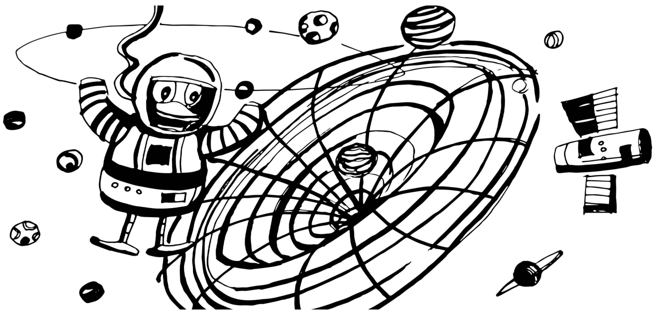


1. Feladat

(a)

I. Írjuk fel a kocsira a dinamika alapegyenletét a tetőponton:

$$mg - N_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{cp}} = m\frac{v^2}{R_{\mathrm{t}}} \ .$$

Ebből a nyomóerő kifejezhető:

$$N_t = m\left(g - \frac{v^2}{R_{\mathrm{t}}}\right) \ . \tag{1.1}$$

II. A fenti egyenletben a kérdéses nyomóerőn kívül a pálya R_{t} görbületi sugara az ismeretlen. Ha találnánk egy mozgást, melynek pályája a hídéval megegyező paraméterű parabolával írható le, és ismernénk az ilyen mozgást végző test sebességét, valamint gyorsulását a pálya vizsgált pontjában, ebből kiszámíthatnánk a hiányzó görbületi sugarat. A ferde hajítás egy megfelelő analógia, így a továbbiakban dolgozzunk ezzel!

1.) A görbületi sugár meghatározásához használjuk fel, hogy a pálya tetőpontján a testnek csak vízszintes sebességkomponense van, illetve a sugárirányú gyorsulás éppen g:

$$R_{\mathrm{t}} = \frac{v_{0x}^2}{g} = \frac{d^2}{8h} \ . \tag{1.2}$$

2.) A keresett nyomóerő a tetőponton (1.1) és (1.2) alapján:

$$N_{\mathrm{t}} = mg - \frac{8mv^2h}{d^2} \ ,$$

így a megadott adatokat behelyettesítve:

$$\boxed{N_{\mathrm{t}} = 8400 \ \mathrm{N}} \ .$$

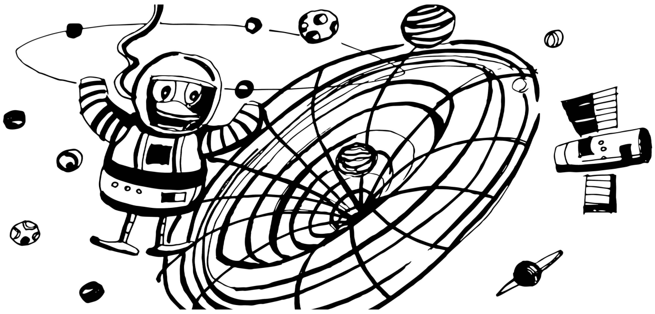
(b)

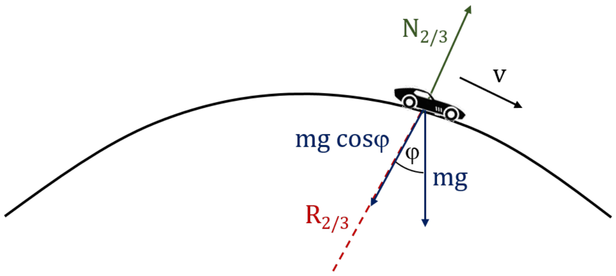
I. Írjuk fel a testre a dinamika alapegyenletét a két part közötti szakasz kétharmad részében! Ehhez felhasználhatjuk a 1.1. ábrát, amely a kocsira ható erőket szemlélteti:

$$mg\cos\varphi - N_{2/3} = m\frac{v^2}{R_{2/3}} \ .$$

Némi átrendezéssel:

$$N_{2/3} = m\left(g\cos\varphi - \frac{v^2}{R_{2/3}}\right) \ . \tag{1.3}$$





1.1. ábra. A kocsira sugárirányban ható erők.

II. A görbületi sugár meghatározásához felhasználhatjuk az eddigiekben alkalmazott ferde hajítást, hiszen a pálya nem változott.

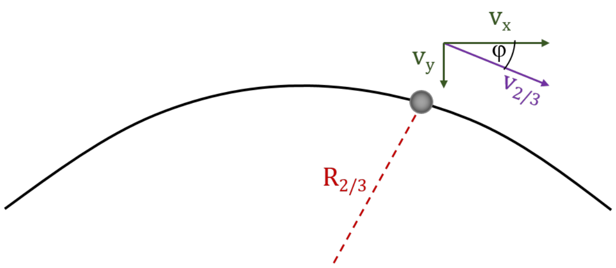
1.) A két part közötti szakasz kétharmad részének eléréséig eltelt idő:

$$t_{2/3} = \frac{2}{3}\, t_{\text{teljes}} = \frac{2}{3}\frac{d}{v_{0x}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{8h}{g}}\ .$$

2.) Ebben a pontban a test sebességkomponensei:

$$v_y = v_{0y} - g\ t_{2/3} = \sqrt{2gh} - \frac{2}{3}\ g\sqrt{\frac{8h}{g}} = -\frac{1}{3}\ \sqrt{2gh}\ ,$$

$$v_x = v_{0x} = \sqrt{\frac{g}{8h}}d\ .$$



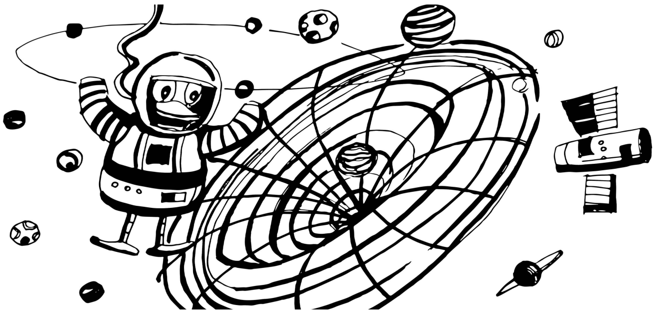
1.2. ábra. A helyettesítő hajítás.

3.) Végül a görbületi sugár kiszámításához használjuk fel, hogy a vizsgált pontban a test sugárirányú gyorsulása $a_n = g\cos\varphi$:

$$R_{2/3} = \frac{v_{2/3}^2}{g\cos\varphi}\ ,$$

továbbá, hogy a 1.2. ábra alapján:

$$\cos\varphi = \frac{v_x}{v_{2/3}}\ .$$



Mindezek felhasználásával:

$$R_{2/3} = \left(\frac{d^2}{8h} + \frac{2}{9}h\right)\sqrt{1 + \frac{16h^2}{9d^2}} \, . \tag{1.4}$$

III. A kérdezett nyomóerő a partok közötti távolság 2/3 részében (1.3) és (1.4) alapján:

$$N_{2/3} = \frac{mgd}{\sqrt{d^2 + \frac{16}{9}h^2}} - \frac{8mv^2hd^2}{\left(d^2 + \frac{16}{9}h^2\right)^{3/2}} \, ,$$

a megadott adatokat behelyettesítve:

$$\boxed{N_{2/3} \approx 8388 \text{ N}} \, .$$

2. Feladat

Bontsuk fel a kérdéses testet kicsiny m_i tömegpontok halmazára. Ekkor a tehetetlenségi nyomaték egy általános $\boldsymbol{n}$ egységvektorral jellemzett tengelyre vonatkozóan definíció szerint:

$$\Theta_{\boldsymbol{n}}^{\text{ell}} = \sum_i^{\text{ell}} m_i \left[|\boldsymbol{r}_i|^2 - (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_i)^2 \right] . \tag{2.1}$$

Vegyük fel koordinátarendszerünket úgy, hogy az x, y és z tengelyek a főtengelyekkel essenek egybe. Ekkor az $\boldsymbol{n}$ egységvektor is komponensekre bontható, mint $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Ezt felhasználva az (2.1) egyenlet átalakítható:

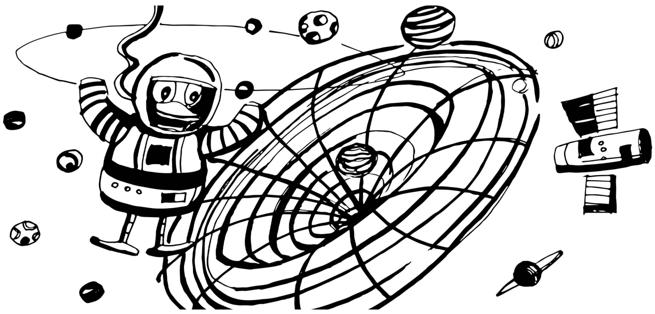
$$\begin{aligned} \Theta_{\boldsymbol{n}}^{\text{ell}} = \left(1 - n_x^2\right) \sum_i^{\text{ell}} m_i x_i^2 + \left(1 - n_y^2\right) \sum_i^{\text{ell}} m_i y_i^2 + \left(1 - n_z^2\right) \sum_i^{\text{ell}} m_i z_i^2 - \\ -2n_x n_y \sum_i^{\text{ell}} m_i x_i y_i - 2n_x n_z \sum_i^{\text{ell}} m_i x_i z_i - 2n_y n_z \sum_i^{\text{ell}} m_i y_i z_i \, . \end{aligned} \tag{2.2}$$

A három utolsó tag az ellipszoid síktükrözési szimmetriái folytán zérus. Konkrétabban, például a legutolsó tagot tekintve látható, hogy megfelelő felbontás esetén bármely (x_i, y_i, z_i) helyzetű tömegponthoz létezik egy ugyanakkora tömegpont a $(x_i, y_i, -z_i)$ helyen, és a kettő járuléka az összegzésben kiejti egymást. Ez alapján a (2.2) egyenlet tovább egyszerűsödik:

$$\Theta_{\boldsymbol{n}}^{\text{ell}} = \left(1 - n_x^2\right) \sum_i^{\text{ell}} m_i x_i^2 + \left(1 - n_y^2\right) \sum_i^{\text{ell}} m_i y_i^2 + \left(1 - n_z^2\right) \sum_i^{\text{ell}} m_i z_i^2 \, . \tag{2.3}$$

A három megmaradó szumma ekvivalens alakú, tekintsük például az elsőt. Ez független az y_i és z_i változóktól, ezért az összegzést nem befolyásolja, ha az y és z irányokban a testet merőleges affinitással a sugarú gömbbé deformáljuk! A gömb forgásszimmetriájából adódóan a szumma összefüggésbe hozható annak tehetetlenségi nyomatékával:

$$\sum_i^{\text{gömb}} m_i x_i^2 = \sum_i^{\text{gömb}} m_i y_i^2 \quad \Longrightarrow \quad \sum_i^{\text{ell}} m_i x_i^2 = \sum_i^{\text{gömb}} m_i x_i^2 = \frac{1}{2}\Theta_x^{\text{gömb}} = \frac{1}{5} m a^2 \, . \tag{2.4}$$



A másik két tag analóg módon számítható, így a (2.3) és (2.4) egyenletek alapján, továbbá kihasználva, hogy $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, adódik a végeredmény:

$$\boxed{\Theta_{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{ell}} = \frac{m}{5}\left[n_x^2\left(b^2+c^2\right) + n_y^2\left(a^2+c^2\right) + n_z^2\left(a^2+b^2\right)\right]}\,.$$

Speciálisan a főtengelyekre vonatkozóan:

$$\boxed{\Theta_x^{\mathrm{ell}} = \frac{m}{5}\left(b^2+c^2\right)\ , \qquad \Theta_y^{\mathrm{ell}} = \frac{m}{5}\left(a^2+c^2\right)\ , \qquad \Theta_z^{\mathrm{ell}} = \frac{m}{5}\left(a^2+b^2\right)}\,.$$

3. Feladat

(a)

A tömegközéppont vektoros definicióját felhasználva, majd azt az x illetve y tengelyekkel párhuzamos komponensekre bontva könnyedén kifejezhető a keresett feltétel:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 r_1 + m_2 r_2 \cos\alpha + m_3 r_3 \cos\beta = 0 \\ m_2 r_2 \sin\alpha = m_3 r_3 \sin\beta \end{cases} \quad . \tag{3.1}$$

(b)

Jelölje az m_1 és m_2 tömegű égitestek távolságát r_{21}, az m_1 és m_3 tömegűekét pedig r_{31}. Az m_1 tömegű testre ható erő $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31}$, amelytől a körpályán való mozgás fenntartásához azt várjuk el, hogy párhuzamos legyen az $\boldsymbol{r}_1$ helyvektorral. A 3.1. ábra jelöléseit felhasználva ez a feltétel komponensenként is megfogalmazható:

$$\boldsymbol{F}_1 \parallel \boldsymbol{r}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad F_{21}\sin\delta = F_{31}\sin\varepsilon \tag{3.2}$$

A (3.2) kifejezésben szereplő F_{21} és F_{31} erők a gravitációs erőtörvény alapján kifejezhetőek:

$$F_{21} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}, \qquad F_{31} = \gamma\frac{m_1 m_3}{r_{31}^2}\ . \tag{3.3}$$

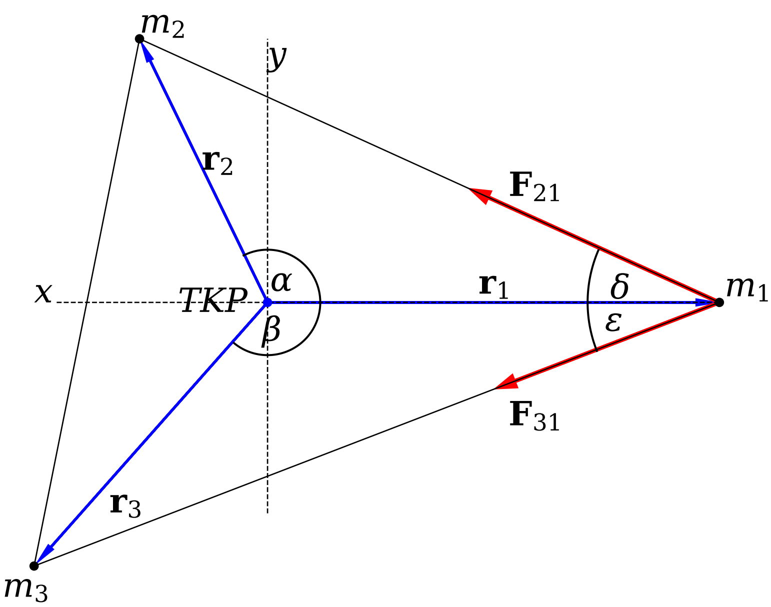
Továbbá szinusztételt felhasználva:

$$\sin\delta = \frac{r_2\sin\alpha}{r_{21}}, \qquad \sin\varepsilon = \frac{r_3\sin\beta}{r_{31}}\ . \tag{3.4}$$

Végül a (3.3) és (3.4) egyenleteket a (3.2) feltételbe behelyettesítve:

$$\frac{m_2 r_2 \sin\alpha}{r_{21}^3} = \frac{m_3 r_3 \sin\beta}{r_{31}^3}\ . \tag{3.5}$$

Innen a (3.1) összefüggést is segítségül hívva leolvasható, hogy $r_{21} = r_{31}$. Hasonlóan adódik, hogy a harmadik oldal is azonos hosszúságú, azaz a csillagok szabályos háromszöget alkotnak, amely a tömegközéppont körül egyenletesen forog.



3.1. ábra. A három csillag

(c)

A továbbiakban jelölje a csillagok alkotta szabályos háromszög oldalhosszát R. Az m_1 tömegű csillag mozgásegyenlete a centripetális gyorsulás vektoros alakját felhasználva:

$$\boldsymbol{F}_1 = -m_1\omega^2\boldsymbol{r}_1 \ . \tag{3.6}$$

Az m_1 tömegű testre ható erő (3.1) szerint alakítható:

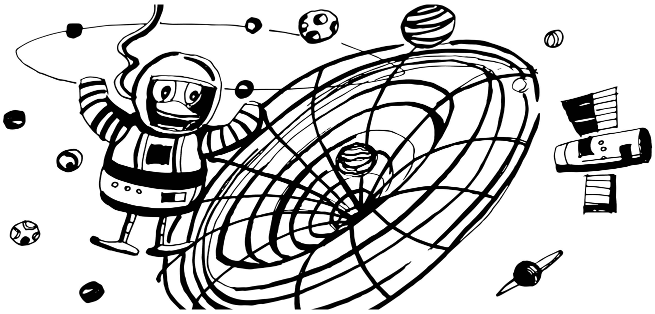
$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31} = \gamma\frac{m_1 m_2}{R^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \gamma\frac{m_1 m_3}{R^3}(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = \\ = \frac{\gamma m_1}{R^3}(m_2\boldsymbol{r}_2 - m_2\boldsymbol{r}_1 + m_3\boldsymbol{r}_3 - m_3\boldsymbol{r}_1) = -\frac{\gamma m_1}{R^3}(m_1 + m_2 + m_3)\boldsymbol{r}_1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

A (3.6) és (3.7) egyenleteket összevetve kifejezhető a szögsebesség:

$$\omega^2 = \gamma\frac{m_1 + m_2 + m_3}{R^3} \ . \tag{3.8}$$

Végül ebből a keringési idő egyszerűen adódik:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{R^3}{m_1 + m_2 + m_3}}} \ .$$



4. Feladat

A feladat megoldása során stacionárius állapotot vizsgálunk, tehát ekkor a lemezek közötti töltéseloszlás illetve az elektromágneses mező sem változik. A töltéseloszlás állandóságának és a lemezek nagy méretének következményeképp a lemezek közötti áramsűrűség mindenhol ugyanakkora:

$$j = \varrho\,(x)\,v\,(x)\ , \tag{4.1}$$

ahol $v\,(x)$ az elektronok sebessége, $\varrho\,(x)$ pedig a töltéssűrűség a felhevített lemeztől x távolságra.

Az elektromos potenciált nullpontját szabadon megválaszthatjuk, legyen ez a felhevített lemez. A másik lemezen pedig legyen $V > 0$, ekkor a kilépő negatív töltésű elektronok elindulnak a magasabb potenciál felé és áram fog folyni ($j < 0$). Abban az esetben viszont, amikor $V < 0$, nem fog áram folyni, mivel az elektronok azon lemez felé gyorsulnak, melyből kilépnek (ezzel azt is megértettük, miért nevezik diódának a fenti elrendezést).

A továbbiakban foglalkozzunk a $V > 0$ esettel, és jelöljük az elektromos potenciált ϕ-vel, az elemi töltést e-vel. Ekkor felírhatjuk az energiamegmaradást az elektron kilépés utáni és egy tetszőleges helyzete között:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv(x)^2 - e\phi\,(x)\ . \tag{4.2}$$

Felhasználva hogy a kilépési sebesség nagyon kicsi ($v_0 \approx 0$):

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e}{m}\phi\,(x)}\,. \tag{4.3}$$

A következő lépésben keressünk egy összefüggést a potenciál és a töltéssűrűség között! Ehhez használjuk fel ϕ definícióját:

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\ , \tag{4.4}$$

és a Gauss-törvényt egy a lemezekkel párhuzamos téglatestre:

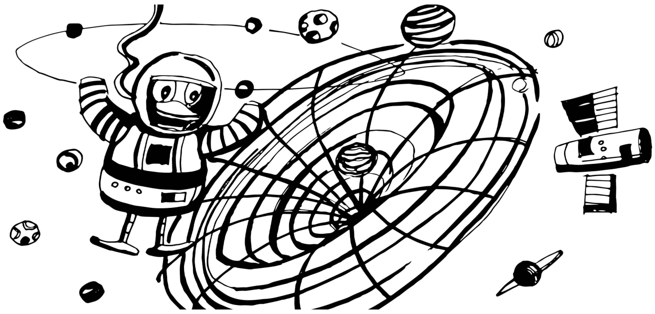
$$\Delta E_x A = \frac{\rho A}{\varepsilon_0}\Delta x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\ . \tag{4.5}$$

A (4.4) és (4.5) összefüggéseket felhasználva:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_0\phi\ \ (x) = -\rho\ . \tag{4.6}$$

A (4.1), (**??**) és (4.6) egyenletek alapján, továbbá az $I = -jA$ áramerősséget bevezetve végül az alábbi differenciálegyenletre jutunk:

$$\phi\ \ (x) = \frac{I}{\varepsilon_0 A}\sqrt{\frac{m}{2e}}\phi\,(x)^{-1/2}\ . \tag{4.7}$$



Keressük a megoldást a megadott segítségnek megfelelően $\phi(x) = \alpha x^n$ alakban. Behelyettesítve a (4.7) differenciálegyenletbe:

$$\alpha n(n-1)x^{n-2} = \frac{I}{\varepsilon_0 A}\sqrt{\frac{m}{2e}}\frac{x^{-n/2}}{\sqrt{\alpha}} \ . \tag{4.8}$$

Ahhoz hogy a fenti próbameoldás valóban kielégítse az egyenletet minden x esetén, szükséges, hogy $n - 2 + n/2 = 0$ teljesüljön, amely alapján $n = 4/3$. Ez alapján α is kifejezhető:

$$\alpha = \left(\frac{81 I^2 m}{32\varepsilon_0^2 A^2 e}\right)^{1/3} \ . \tag{4.9}$$

Ezzel a (4.7) differenciálegyenletet megoldottuk.

A feladat kérdésének megválaszolásához immár csak annyit kell felhasználnunk, hogy $x = d$ esetén $\phi(d) = V$ (ahol d a lemezek távolsága):

$$V = \left(\frac{81 I^2 m d^4}{32\varepsilon_0^2 A^2 e}\right)^{1/3} \ . \tag{4.10}$$

Ezt invertálva:

$$\boxed{I = \frac{4\varepsilon_0 A}{9d^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}V^{3/2} \sim V^{3/2}} \ .$$

Ezzel tehát megkaptuk, hogy a vákuumdióda karakterisztikája $I \sim V^{3/2}$.

Kitekintés:

A fenti feladat lényegében a Child–Langmuir-törvény levezetése, amely az elektroncsöves diódák kapcsán kerül elő.

A feladatot megoldhatjuk relativisztikusan is viszont ekkor nem elegendő az energia megmaradást relativisztikusan felírni hanem j definícióját is relativisztikuan kell használni négyesvektorokkal, melyet visszafordítva a hármasvektorok nyelvére a nem relativisztikusan használt

$$j = \varrho(x)\, v(x) \ .$$

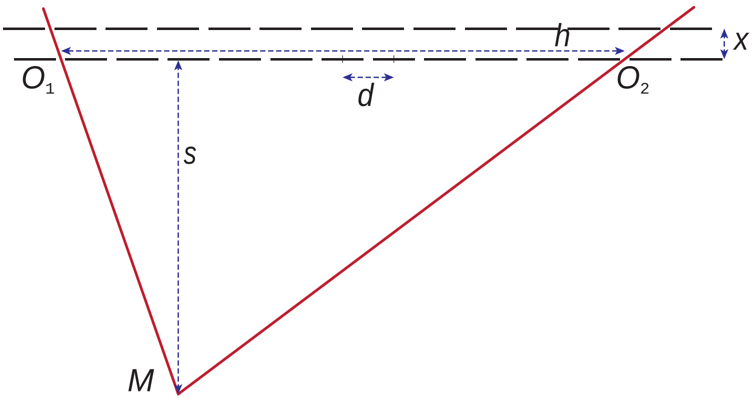
adódik. Az energiamegmaradás ellenben a következőképp módosul:

$$v(x) = c\frac{\sqrt{\left(\frac{e}{mc^2}\phi\right)^2 + \frac{2e}{mc^2}\phi}}{\frac{e}{mc^2}\phi + 1} \ .$$

Ebből láthatjuk, hogy a nemrelativisztikus közelítés akkor lesz érvényes, ha $e\phi \ll mc^2$, összhangban azzal, hogy ekkor lesz az elektron sebessége sokkal kissebb, mint a fénysebesség.

5. Feladat

A sétáló ember ott lát világosabb foltokat, ahol két rés a szemszögéből éppen egymás mögött helyezkedik el. Nevezzük az egyik ilyet nulladik világos foltnak! Ehhez képest kicsit oldalra nézve az egyik kerítés rését a másik kerítés oszlopa fogja takarni, így sötétebb (átlátszatlan) folt jelenik meg.



5.1. ábra. Az elrendezés geometriája.

Tovább fordulva ismét világos folt látható, azaz a gyalogos szeme ismét rajta van két rés egyenesén. Ez úgy lehetséges, hogy a közelebbi kerítés k-adik és a távolabbi kerítés $k+1$-edik[1] résén nézünk keresztül (a nulladik világos folttól számolva). Ez látható a 5.1. ábrán, ahol a fénysugarakat vörös vonalak jelölik. A látott minta periódusának h hosszát k segítségével kifejezhetjük:

$$h = k \cdot d \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{h}{d}\,, \tag{5.1}$$

ahol $d = d_{\text{rés}} + d_{\text{oszlop}}$. A két fényes folt irányába húzott egyenesek és a kerítések két hasonló háromszöget alkotnak. A kisebb háromszög magassága a közelebbi korlát távolsága (s), a nagyobbé a távolabbi korlát távolsága ($s+x$). Hasonló háromszögek miatt felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{s}{k \cdot d} = \frac{s+x}{(k+1)\cdot d}\,. \tag{5.2}$$

A (5.1) és (5.2) egyenletek alapján, a megadott adatokat behelyettesítve adódik a gyalogos átjáró szélessége:

$$\boxed{x = \frac{ds}{h} = 5\ \mathrm{m}}\,.$$

[1] A távolabbi kerítés tetszőleges $k+q$-adik résének átfedése is világos foltot eredményez. Ennek az átfedésnek az eredeti iránnyal bezárt α szöge: $tg(\alpha) = q$, kicsi α-ra. Ebből látszik, hogy $q = 1$ adja az első világos foltot.